Exercice 1

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \frac{1}{i} z$
2. $z \mapsto z + (2+i)$
3. $z \mapsto \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1-i)$
4. $z \mapsto (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha$, $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Correction Exercice 1

1) On écrit $\frac{1}{i}z = e^{-\frac{i\pi}{2}}z$ *, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle* $\frac{-\pi}{2}$.

2) On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $(2+i)$.

3) L'application de la forme $z \mapsto az+b$ *est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant* $a = \left(1+i\sqrt{3}\right)a + \sqrt{3}(1-i)$ *On trouve* $a = 1+i$ *, le centre de la similitude est donc le point A d'affixe* $(a = 1+i)$ *. On a de plus :* $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\frac{\pi}{3}$.

4) Si $\alpha = 0$ *, la transformation est simplement l'identité. Si non, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe z solution de l'équation :* $z = (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \Leftrightarrow z = 1$.

Le centre de la similitude est donc le point A d'affixe $(a = 1)$*. De plus, on a :*

$$1 + i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport $\frac{1}{\cos\alpha}$ *et d'angle α.*

Exercice 4

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie la condition.

1. $I(i)$ *et* $M'(iz)$ *sont alignés avec M; déterminer alors l'ensemble des points* M' *correspondants;*
2. $Re\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$;
3. *M, P d'affixe* z^2 *et Q d'affixe* z^3 *sont les sommets d'un triangle rectangle.*

Correction Exercice 4

1. *On sait que les points I, M et M' sont alignés si et seulement si*

$$\left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}\right) \equiv 0[\pi] \text{ ou } M = I \text{ ou } M' = I \text{ ou } M = M'$$

En termes de nombres complexes, ceci se traduit par :

$$arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) \equiv 0[\pi] \text{ ou } z = i \text{ ou } iz = i \text{ ou } iz = z \text{ .}$$

Introduisons le point A d'affixe 1. Alors, ceci devient :

$$\frac{\pi}{2}+arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\equiv 0[\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{-\pi}{2}[\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O$$

$$\Leftrightarrow (IM)\perp(AM) \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O$$

Les points M solutions sont donc les points du cercle diamètre $[AI]$
(O étant également un point de ce cercle).

Puisque M′ est image de M par rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, *les points M′ correspondants sont sur l'image de ce cercle par cette rotation.*

2. *Notons A d'affixe 1 et I d'affixe i. La question s'écrit encore :* $\frac{z-1}{z-i}=ia$ *, avec* $a\in\mathbb{R}$ *,*
   c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{IM}$ *sont orthogonaux. Autrement dit, la condition est vérifiée si et seulement si M appartient au cercle de diamètre* $[AI]$, *excepté I*
   (on doit avoir $z\neq i$ *pour définir le quotient).*
3. *On va d'abord supposer que* $z\neq 0$; $z\neq 1$ *et* $z\neq -1$ *pour que les trois points M,P,Q soient distincts et qu'on soit sûr d'avoir affaire à un vrai triangle. On va utiliser la condition suivante : soit* $A(a)$, $B(b)$ *et* $C(c)$ *. Les droites* (AB) *et* (AC) *sont perpendiculaires si et seulement si*
   $$\exists m\in\mathbb{R}\ /\ \frac{c-a}{b-a}=mi\Leftrightarrow Re\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0\ .$$

On distingue alors trois cas :

■ *le triangle est rectangle en M. Ceci est équivalent à*
$$Re\left(\frac{z^3-z}{z^2-z}\right)=0\Leftrightarrow Re(z+1)=0\Leftrightarrow Re(z)=-1.$$
Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=-1$.

■ *le triangle est rectangle en P. Ceci est équivalent à* $Re\left(\frac{z^3-z^2}{z-z^2}\right)=0\Leftrightarrow Re(z)=0$.
Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=0$.

■ *le triangle est rectangle en Q. Ceci est équivalent à :* $Re\left(\frac{z-z^3}{z^2-z^3}\right)=0\Leftrightarrow Re\left(\frac{z+1}{z}\right)=0$.
Notons D d'affixe -1 *et O d'affixe* 0. *On obtient que les droites* (DM) *et* (OM) *sont orthogonales, c'est-à-dire que M décrit le cercle de diamètre* $[OD]$.

<u>Exercice 5</u>

Soit ABCD un carré dans le plan complexe. Prouver que, si A et B sont à coordonnées entières, il en est de même de C et D. Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières?

<u>Correction Exercice 5</u>

On note $a=x+iy$ *et* $b=x'+iy'$ *les affixes respectives de A et B. Par hypothèse, x, x′, y et y′ sont des entiers. Puisque ABCD est un carré, D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *. Traduit en termes de nombres complexes, si d est l'affixe de D, ceci signifie que*
$$d-a=i(b-a)\Rightarrow d=a+i(b-a)=x+iy+i\left((x'-x)+i(y'-y)\right)=x+y-y'+i(y+x'-x)\ .$$

Ainsi, les coordonnées de D sont bien des entiers. Pour prouver que les coordonnées de C sont des entiers, on procède de la même façon, en utilisant cette fois le fait que C est l'image de A dans la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Imaginons maintenant que ABC soit un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières, et gardons les notations précédentes. Alors, C, d'affixe $c = x'' + iy''$ *est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$. *Autrement dit,*

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Rightarrow c = (x+iy) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left((x'-x) + i(y'-y)\right).$$

On développe, et après calcul, on trouve que : $c = x + \frac{x-x'}{2} - \frac{\sqrt{3}(y'-y)}{2} + i\left(y + \frac{y'-y}{2} + \frac{\sqrt{3}(x'-x)}{2}\right)$.

Pour que la partie réelle de c soit un entier, il est nécessaire que $y = y'$ *et pour que la partie imaginaire de c soit nulle, il est nécessaire que* $x = x'$ *; donc* $x = x' = x''$. *Finalement, ceci entraine* $A = B = C$, *c'est-à-dire que le triangle est réduit à un point!*