Série n°32 d'exercices sur fcts ln   2éme Bac SM

EXERCICE 1:

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x)^4$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\ln x - x\ln(x+2)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\ln(x^2+2x-3)$

EXERCICE 2:

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{(\ln x)^2-\ln x}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1-Déterminer D_f le domaine de définition de f ;puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2-Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 et à droite de e.

3- Etudier les branches infinies de (C_f).

4- Etudier les variations de f.

5- Tracer (C_f).

6- Soit g la restriction de f sur $]0;1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J à déterminer.
On note g^{-1} sa bijection réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

EXERCICE 2:

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$

1- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\exists! x_n\in\,]0;+\infty[)\,/\,f(x_n)=n$

2- a) Calculer x_1

b) Etudier la monotonie de la suite (x_n).

c) En déduire que la suite (x_n) est divergente.

4-Etudier le signe de $n\mapsto f(n)-n$; puis déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $x_n\le n$

5-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $n - \ln n \leq x_n$

6- a) Montrer qu'on peut écrire x_n sous la forme $x_n = n(1 + a_n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

c) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n + \ln n - n)$.

EXERCICE 3:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x \ln(\sqrt{x} - 1)^2$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1-Déterminer D_f le domaine de définition de f; puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2-Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

3- a)Calculer f' sur D_f.

b) Etudier le signe de f' sur $]0;1[$.

4- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(t) = \ln t^2 + \frac{1}{t} + 1$

a) Etudier les variations de g.

b) Déduire le signe de g.

5-Montrer que : $(\forall x \in]1;+\infty[)$; $f'(x) = g(\sqrt{x} - 1)$.

6-Dresser le tableau des variations de f.

7-Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont l' abscisse supérieur strictement à 1.

8-Etudier les branches infinies de (C_f)

9- Donner une équation cartésienne de la tangente de (C_f) en $(4; f(4))$

10-tracer (C_f).

EXERCICE 4:

Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

EXERCICE 5:

Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

EXERCICE 6:

Discuter selon les valeurs de a $(a \in \mathbb{R})$ le nombre de solutions de (E) : $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = a$

EXERCICE 7:

1-Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x$

2- Déduire $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

EXERCICE 8:

A l'aide du théorème de ROLLE_ calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

EXERCICE 9:

1-calculer pour tout x réel $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

2-soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$ on pose $S_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2\frac{\cos\theta}{2^n}-1\right)$

a-Montrer que $S_n(\theta)$ est bien définie.

b-Montrer que $S_n(\theta)=\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)-\ln\left(\frac{\theta}{2.3^n}\right)$

c-Calculer $\lim_{n\to+\infty}S_n(\theta)$