



guessmaths

**Série n° 5 exercices « Les suites » 2ème Bac SM**

**EXERCICE 1**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$ .

1. Calculer les termes  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ? ni géométrique ?
3. On admet que, pour tout  $n$ ,  $u_n$  n'est pas nul. On pose :  $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$ 
  - a) Calculer les trois premiers termes de  $(v_n)$ .
  - b) Déterminer la nature de  $(v_n)$ .
  - c) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5. On pose pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

**CORRECTION :**

1. On a :  $u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2}{5}$  et  $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{1}{4}$ .

2. On a :  $u_1 - u_0 = -\frac{3}{5}$  et  $u_2 - u_1 = -\frac{3}{20}$  donc  $(u_n)$  n'est pas arithmétique.

Puis  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5}$  et  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{8}$  donc  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

3. a) On a :  $v_0 = 1 + \frac{2}{u_0} = 3$ ,  $v_1 = 1 + \frac{2}{u_1} = 6$  et  $v_2 = 1 + \frac{2}{u_2} = 9$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b) Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a : } v_{n+1} &= 1 + \frac{2}{u_{n+1}} \\
 &= 1 + \frac{2}{\frac{2u_n}{2+3u_n}} \\
 &= \frac{2+4u_n}{u_n} \\
 &= \frac{2}{u_n} + 4 \\
 &= v_n + 3
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_{n+1} = v_n + 3$ , La suite  $(v_n)$  est donc arithmétique de terme initial  $v_0 = 3$  et de raison 3.

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $v_n = v_0 + nr$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = 3 + 3n$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

Donc  $u_n = \frac{2}{v_n - 1}$  ; d'où  $u_n = \frac{2}{2 + 3n}$ .

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + 3n} = 0$$

5. pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$  et comme :  $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$  donc :  $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}(v_n - 1)$  on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}((v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)) \\ &= \frac{1}{2} \left( v_0 + v_1 + \dots + v_n - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{(n+1) \text{ fois}} \right) \end{aligned}$$

Or la suite  $(v_n)$  est donc arithmétique, d'où :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \dots + v_n &= (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+6)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } S_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{(n+1)(3n+6)}{2} + (n+1) \right) \\ &= \frac{(n+1)(3n+8)}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

### **EXERCICE 2:**(6 points)

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 4$  et  $U_{n+1} = \frac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq U_n \leq 4$

2) a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante

b) En déduire que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite

3) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

b) Déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Retrouver alors la limite de  $(U_n)$

4) a) Montrer que  $\forall n \geq 4 : 2^n \geq n^2$

b) Déduire que  $\forall n \geq 4 : n(U_n - 3) \leq \frac{1}{n}$ .

Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n(U_n - 3)]$

5) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : S_n = \sum_{k=0}^n \frac{6}{U_k - 1}$  et  $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{2U_k}{U_k - 1}$

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : \text{on a } U_{n+1} = S_n - S'_n + 4$

b) Déterminer la limite de  $S_n$  puis celle de  $S'_n$ .

**EXERCICE 3:** (points)

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = 1$  et pour tout entier  $n$  :  $U_{n+1} = \frac{U_n}{(1 + \sqrt{U_n})^2}$

1) a) Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $U_n > 0$ .

b) Montrer que  $(U_n)$  est décroissante.

c) Dédire que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}}$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique de raison égale à 1.

b) On déduit  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$  et retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

a) Montrer que la suite  $(S_n)$  est croissante.

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que :  $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ . En déduire que la suite  $(S_n)$  est convergente et donner un encadrement de sa limite