Série n° 6 d’exercices « Fonction Exponentielle »

EXERCICE 1

Dans le plan muni d’un repère orthonormé, on désigne par Cf la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x+e^{-x}$

1. *Justifier que Cf passe par le point A de coordonnées (0;1).*
2. *Déterminer le tableau de variation de la fonction f. On précisera les limites de f en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

CORRECTION

1. $f(0)=0+e^{0}=1$

Donc la courbe C_f *passe par le point A de coordonnées (0;1).*

2. *f est définie et dérivable sur IR et :*

$f'(x)=1-e^{-x}$

$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leqslant 1$

Du fait de la stricte croissance de la fonction exponentielle :

$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -x\leqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Pour la limite en $-\infty$ *on a une forme indéterminée du type «*$+\infty-\infty$*». On peut lever cette indétermination en mettant x en facteur :*

$$f(x)=x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

En posant $X=-x$ *on voit que :* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{e^{X}}{X}=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=-\infty$ *et par produit :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

EXERCICE 2

Soient f et g les fonctions définies sur IR par

$f(x)=e^{x}$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$.

On note C_f *et* C_g *les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.*

1. *Démontrer que les courbes* C_f *et* C_g *ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.*
2. *Étude de la position relative de la courbe* C_g *et de la droite Δ*

Soit h la fonction définie sur IR par :

$h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x)=x\left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{2}{x}\right)$

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur IR.

Pour tout réel x, calculer h'(x) et étudier son signe suivant les valeurs de xx.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur IR.

e. En déduire que, pour tout réel x,

$2e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x+1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g *et de la droite Δ ?*

3. *Étude de la position relative des courbes* C_f *et* C_g

Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

Déterminer la position relative des courbes C_f *et* C_g .

CORRECTION

Soient $f(x)=e^{x}$ *et* $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$ *deux fonctions définies sur IR.*

1) On voit aisément que $f(0)=g(0)=1$ *, ce qui implique que les courbes représentatives* C_f *et* C_g *de f et g ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.*

Le coefficient directeur des tangentes en ce point à C_f *et* C_g *est donnée, respectivement, par les valeurs de* $f'(0)$ *et* $g'(0)$ *. On a :* $f'(x)=e^{x}$ *d'où* $f'(0)=1$ *et* $g'(x)=e^{\frac{x}{2}}$ *d'où* $g'(0)=1$.

Donc les tangentes en $(0;1)$ *à* C_f *et* C_g *ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite* Δ *dont on détermine facilement l'équation :* $y=x+1$.

2) Soit $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$ *définie sur IR.*

a) En observant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ *, on en déduit que* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

b) On peut écrire $h(x)=x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right)$ *et comme* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)=+\infty$ *, on en déduit que* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

c) On calcule la dérivée de h : $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$. La fonction $x\mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est croissante sur IR et l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. On a $h'(0)=0$ et donc : $h'(x)<0$ pour $x<0$ et $h'(x)>0$ pour $x>0$

d) En remarquant que $h(0)=0$, on peut dresser le tableau de variation de h sur IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que $h(x)\geq 0$ pour tout $x\in IR$. C'est à dire $2e^{\frac{x}{2}}-x-2\geq 0$ d'où l'on tire : $2e^{\frac{x}{2}}-1\geq x+1$.

f) On en déduit que Δ est au -dessous de C_g sauf pour $x=0$ où elle est tangente à C_g.

3.a) $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}+1$

b) On remarque que $f(x)-g(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}+1$. De plus, étant un carré qui s'annule pour $x=0$, alors $f(x)-g(x)\geq 0$ sur IR. D'où l'on déduit que : $f(x)\geq g(x)$ pour tout $x\in IR$, et C_f est au -dessus de C_g sauf pour $x=0$ où les deux courbes sont tangentes.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=e^x-x$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f.
2. En déduire que pour tout réel x : $e^x>x$.

   Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
3. A l'aide de la question précédente, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$

1. Etudier le sens de variation de la fonction g.

   Montrer que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

CORRECTION

PARTIE A

1. $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$\Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Car le fonction exponentielle est strictement croissante.

Par ailleurs $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. *Le tableau précédent montre que pour tout* $x \in IR$, $f(x) > 0$ *, c'est à dire* $e^x > x$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ *Donc d'après le* <u>*théorème de comparaison*</u> *pour les limites infinies* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3. *On pose* $X = -x$. *Lorsque* $x \to -\infty$, $X \to +\infty$ *et :* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X}$

Or d'après la question précédente $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *donc par quotient :* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$

En conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

PARTIE B

1. $g'(x) = e^x - x = f(x) > 0$ *pour tout* $x \in IR$.

Donc la fonction g est croissante sur IR

On en déduit que pour $x > 0$, $g(x) > g(0) = 1 > 0$

2. *Pour x strictement positif* $g(x) > 0$ *càd* $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ *donc* $e^x > \dfrac{x^2}{2}$

Par conséquent : $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ *et comme* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, *d'après le* <u>*théorème de comparaison*</u> *pour les limites infinies :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \quad = +\infty$

3. *On pose, là encore* $X = -x$ *: Lorsque* $x \to -\infty$, $X \to +\infty$ *et :*

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-Xe^{-X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{-X}{e^X}\right)$

4. *Or d'après la question précédente* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ *donc par quotient :* $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

En conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$