guessmaths

Devoir surveillé n°2 B- Continuité   2éme Bac SM

Exercice 01 : (4,5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}$

1) a) *Déterminer* D_f ,

b) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) *Montrer que f admet un prolongement par continuité g en* $x_0=1$.

b) *La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en* $x_0=-8$?

3) *Justifier que g est continue sur chacun des intervalles* $]-\infty;-8[$ *et* $]-8;+\infty[$.

Exercice 02 : (02 points)

1) *Montrer que l'équation :* $(E_1): 4x^3-12x+1=0$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]-1,1[$.

2) *En déduire que l'équation :* $(E_2): x^4-6x^2+x+1=0$ *admet exactement deux*

Solutions dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 03 : (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x-\sin x$.

1) a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) *Montrer que f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* $\mathbb{R}$.

c) *Justifier que* f^{-1} *est impaire.*

d) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *, l'équation :* $(E): f(x)=f^{-1}(x)$.

2) a) *Montrer qu'il existe une fonction unique g définie sur* $\mathbb{R}$ *, tels que :* $(\forall x\in\mathbb{R})$,

$$g(x)-\sin(g(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) *Justifier que g est paire, puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) *Montrer que g est continue sur* $\mathbb{R}$.

d) *Déterminer la monotonie de g sur* $\mathbb{R}^+$ *, puis dresser son tableau de variation Sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 04 : (2,5 points)

Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\operatorname{Arctan}(2x-1)-\pi}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{Arctan}(x+1)-\operatorname{Arctan}(x)}{\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\right)$

***Exercice 05* : (3,5 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ *par :* $f(x)=\tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)$

1) a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x)$.

b) *Montrer soigneusement que f est continue sur I.*

2) a) *Montrer que f admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur intervalle J Que l'on déterminera.*

b) *Déterminer* $f^{-1}(x)$ *en fonction de x pour tout* $x\in J$ *.*

Correction

***Exercice 01* :**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}$

1) a) ● *Le discriminant du trinôme* $2x^2+x+1$ *est :* $\Delta=1^2-4\times2\times1=-7<0$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 2x^2+x+1>0$

●*Résolvons l'équation* $x-3+\sqrt{2x^2+x+1}=0$

$\angle$ *Si* $x\geq3$ *alors* $x-3+\sqrt{2x^2+x+1}>0$

$\angle$ *Si* $x<3$ *alors* $x-3+\sqrt{2x^2+x+1}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}=3-x$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1=(3-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1=9-6x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+7x-8=0$$

Et $\Delta=7^2-4\times1\times(-8)=81>0$

Donc les solutions de l'équation $x-3+\sqrt{2x^2+x+1}=0$

Sont $x_1=\dfrac{-7-9}{2}=-8<3$ *et* $x_2=\dfrac{-7+9}{2}=1<3$

Donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-8;1\}}$

b) *Calculons* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

On a : ► $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \ \ et \ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1 \\ \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2 \end{cases}$$

$$Donc\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$D'où\ \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

$$\blacktriangleright\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \ \ et \ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2 \end{cases}$$

$$Donc \ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$D'où \ \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

2) a) *Calculons* $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

Soit $h(x)=x-1+\sqrt{2x^2+x+1}$ *; alors* $h(1)=2$

Et h est dérivable sur $\mathbb{R}$ *;* $h'(x)=1+\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$ *et* $h'(1)=\frac{9}{4}$

On a : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\frac{x-1+\sqrt{2x^2+x+1}-2}{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\frac{h(x)-h(1)}{x-1}}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right)=\frac{9}{4}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x)=\frac{4}{9}}$

Comme $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ *est finie alors f admet un prolongement par continuité g en* $x_0=1$ *;*

définie sur $\mathbb{R}-\{-8\}$ *par :*

On a pour $x \neq 1$ *:* $\dfrac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}} = \dfrac{(x-1)\left(3-x+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}^2-(x-3)^2}$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\left(3-x+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\cancel{(x-1)}(x+8)}$$

$$= \frac{3-x+\sqrt{2x^2+x+1}}{x+8}$$

$$\boxed{g : \begin{cases} g(x) = \dfrac{3-x+\sqrt{2x^2+x+1}}{x+8} & si\ x \neq 1 \\ g(1) = \dfrac{4}{9} \end{cases}}$$

b) *Soit* $x<1$ *; on a :* $f(x) = \dfrac{3-x+\sqrt{2x^2+x+1}}{x+8}$

Donc $\lim\limits_{x\to -8} f(x) = \lim\limits_{x\to -8}\left(\dfrac{3-x+\sqrt{2x^2+x+1}}{x+8}\right) = \pm\infty$

D'où f n'admet pas de limite finie en $x_0 = -8$ *; alors f n'admet pas de prolongement par continuité g en* $x_0 = -8$ *.*

3) La fonction polynôme $x \mapsto 2x^2+x+1$ *est continue positive sur* $\mathbb{R}$ *; donc la fonction* $x \mapsto \sqrt{2x^2+x+1}$ *est Continue sur* $\mathbb{R}$*.*

De plus le fonction $x \mapsto x-3$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *; donc le fonction* $x \mapsto x-3+\sqrt{2x^2+x+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction polynôme* $x \mapsto x-1$ *est Continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Comme $\mathbb{R}-\{-8;1\}$ *;* $x-3+\sqrt{2x^2+x+1} \neq 0$

Alors g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-8[$ *;* $]-8;1[$ *et* $]1;+\infty[$.

Conclusion

g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-8[$ *;* $]-8;1[$ *et* $]1;+\infty[$ *; de plus elle est continue en 1 ; par conséquent g est continue sur chacun des intervalles* $]-\infty;-8[$ *et* $]-8;+\infty[$

.

Exercice 2

1) *Considérons la fonction f définie sur* $[-1;1]$ *par :* $f(x)=4x^3-12x+1$

f est le restriction d'une fonction polynôme ; donc f est continue dérivable sur $[-1;1]$ *; de plus pour tout* $x\in[-1;1]$ *:*
$$\begin{aligned} f'(x)&=12x^2-12\\ &=12(x^2-1)\\ &=12(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

Alors $(\forall x\in[-1;1])$ *;* $f'(x)<0$

Donc f *est strictement décroissante sur* $[-1;1]$

On a : $f(-1)=9$ *et* $f(1)=-7$ *donc* $f(-1)\times f(1)<0$ *et comme f est continue strictement décroissante sur* $[-1;1]$ *alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation* $f(x)=0$ *(càd* (E_1)*) admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]-1;1[$

2) *Soit F la fonction définie sur* $[-1;1]$ *par :* $F(x)=x^4-6x^2+x+1$

F est le restriction d'une fonction polynôme donc F est continue et dérivable sur $[-1;1]$

de plus $(\forall x\in[-1;1])$ *;* $F'(x)=f(x)$ *; et f est décroissante sur* $[-1;1]$ *; donc :*

► $(\forall x\in[-1;\alpha])$ *;* $f(x)\geq f(\alpha)=0$ *; d'où* $F'(x)\geq 0$

► $(\forall x\in[\alpha;1])$ *;* $f(x)\leq f(\alpha)=0$ *; d'où* $F'(x)\leq 0$

Tableau de variation de F sur $[-1;1]$

x	-1		α		1
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	-5	$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	-3

Comme $f(0)=1$ *et* $f(\alpha)=0$ *alors* $\alpha>0$

Si non $\alpha\leq 0$ *alors* $f(\alpha)\geq f(0)\Rightarrow f(0)\leq 0$

Ce qui est absurde donc $\alpha\geq 0$.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136

D'où $F(0) < F(\alpha)$

Par suite $F(\alpha) > 1.$

Car F est strictement croissante sur $[-1;\alpha]$ *et* $0 \in]-1;\alpha[$

F est Continue strictement croissante sur l'intervalle $[-1;\alpha]$ *et* $F(-1)\times F(\alpha) < 0$ *;*
d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $F(x)=0$ *(càd:* (E_2)*) admet une solution unique dans* $]-1;\alpha[$.

De même ; F est continue strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha;1]$ *et*
$F(\alpha)\times F(1) < 0$ *; d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation* $F(x)=0$ *(càd:* (E_2)*)admet une unique solution dans l'intervalle* $]\alpha;1[$.

Conclusion :

L'équation (E_2) *admet exactement deux solutions dans l'intervalle* $]-1;1[$.

<u>Exercice 3</u>

f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x - \sin x$.

1) a) *Calculons* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $-1 \le -\sin x \le 1$

Donc : $x-1 \le x - \sin x \le x+1$

D'une part *:* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f(x) \ge x-1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ *=0*

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

D'autre part *:* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $f(x) \le x+1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

b) *Les fonctions* $x \mapsto x$ *et* $x \mapsto \sin x$ *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; donc f est continue dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme somme de deux fonctions continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $f'(x) = 1 - \cos x$

Comme : $\cos x \le 1 \Rightarrow 1 - \cos x \ge 0\, i$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) \geq 0$

Et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Les valeurs qui annulent f ne constituent pas un intervalle donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ *.*

Conclusion

f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $f(\mathbb{R})$*.*

On a : $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur* $\mathbb{R}$ *.*

c) *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $y = f^{-1}(-x) \Leftrightarrow -x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = -f(y)$$

Et $-f(y) = f(-y)$ *(car f est impaire)*

Donc $x = f(-y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -y$

$$\Leftrightarrow y = -f^{-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$$

D'où f^{-1} *est impaire.*

Remarque :

En général si f est une bijection impaire alors sa fonction réciproque f^{-1} *est impaire.*

d) *Soit l'équation :* $(E): f(x) = f^{-1}(x)$

Attention : *L'équation* $f(x) = f^{-1}(x)$ *n'est pas équivalente à l'équation* $f(x) = x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

► *Si* $x = k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $f(k\pi) = k\pi \Leftrightarrow f^{-1}(k\pi) = k\pi$

Par suite $f(k\pi)=f^{-1}(k\pi)$

Donc : $\{k\pi \,/\, k\in\mathbb{R}\}\subset S$

(S est l'ensemble des solutions de (E) *).*

► *Si* $(\forall k\in\mathbb{Z})$; $x\neq k\pi$ *alors :* $x\in\,]n\pi;(n+1)\pi[$ *où* $n\in\mathbb{Z}$

•) *Si n est paire ; alors* $\sin x>0$

donc $f(x)>x$*; d'où* $f^{-1}(x)<x$.

Alors : $\begin{cases} f(x)<x \\ f^{-1}(x)>x \end{cases} \Rightarrow f(x)\neq f^{-1}(x)$

•) *Si n est impaire ; alors* $\sin x<0$

Donc $f(x)<x$*; d'où* $f^{-1}(x)>x$.

Alors : $\begin{cases} f(x)>x \\ f^{-1}(x)<x \end{cases} \Rightarrow f(x)\neq f^{-1}(x)$

Donc x n'est pas solution de l'équation (E).

Conclusion : $S=\{k\pi \,/\, k\in\mathbb{R}\}$

2) a) *soit* $x\in\mathbb{R}$

$$g(x)-\sin(g(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g(x)=f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

Donc il existe une fonction unique g qui vérifie : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)-\sin(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Avec $g=f^{-1}\circ u$ *où* $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

b) *vu que u est paire alors :* $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(-x)=(f^{-1}\circ u)(-x)$

$$= f^{-1}(u(-x))$$

$$= f^{-1}(u(x))$$

$$= g(x)$$

Ce qui ne justifie que g est paire

•) *On a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$ *et comme* f^{-1} *est continue eu* 0 *alors :* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)= f^{-1}(0)$

Or : $f^{-1}(0)=0$ *(car* $f(0)=0$*).*

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0}$

c) *La fonction* $u : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et f est continue sur* $u(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*$ *; donc g continue sur* $\mathbb{R}$.

c) La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$ *(car* $u'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ *)et comme* f^{-1} *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *alors* $g = f^{-1}\circ u$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$ *et comme g est paire alors elle et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^-$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2}$

Cette limite se présente sous le forme $"\frac{0}{0}"$ *qui est une forme indéterminée.*

Pour $x \neq 1$ *on a :* $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2} = \frac{\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x^3}}{x+\sqrt[6]{x^2}-2}$

$$= \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 - \left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 - 2}$$

On pose $t = \sqrt[6]{x}$; $x \to 1$ *alors* $t \to 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2} = \lim\limits_{t \to 1} \frac{t^2 - t^3}{t^6 + t^2 - 2}$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2(1-t)}{t^6 - 1 + t^2 - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2(1-t)}{(t-1)\sum_{k=0}^{5} t^6 + (t-1)(1+t)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{-t^2}{\sum_{k=0}^{5} t^6 + (1+t)} = \frac{-1}{8}$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2} = \frac{-1}{8}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4\operatorname{Arctan}(2x-1) - \pi}{x-1}$

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $h(x) = \operatorname{Arctan}(2x-1)$

Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ *comme composée de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; en particulier elle dérivable en* 1 *; et on a :* $h'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{4\operatorname{Arctan}(2x-1) - \pi}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{Arctan}(2x-1) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$h'(x) = 2\times\frac{1}{1+(2x-1)^2} \Rightarrow h'(1) = 1$$

D'où $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{Arctan}(2x-1)-\dfrac{\pi}{4}}{x-1} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4\mathrm{Arctan}(2x-1)-\pi}{x-1} = 4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}(x)}{\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Pour tout $x>0$ *et* $x\neq1$ *on a :* $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}(x) < \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\tan\left(\mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}(x)\right) = \dfrac{x+1-x}{1+x(x+1)}$

$$= \frac{1}{x^2+x+1}$$

D'où $\mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

Et $\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = -2\sin\left(\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}}{2}\right)$

$$= -2\sin\left(\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{2x(x+1)}\right)\cos\left(\frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{1}{2x(x+1)}\right)\cos\left(\frac{2x+1}{2x(x+1)}\right)$$

Donc $\dfrac{\mathrm{Arctan}(x+1)-\mathrm{Arctan}(x)}{\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)}{-2\sin\left(\dfrac{1}{2x(x+1)}\right)\cos\left(\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}\right)}$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2+x+1}}}{-2\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{2x(x+1)}\right)}{\dfrac{1}{2x(x+1)}}\times\cos\left(\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}\right)}\times\frac{2x(x+1)}{x^2+x+1}$$

Et ▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2+x+1}}=1$ *;on pose* $X=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{2x(x+1)}\right)}{\dfrac{1}{2x(x+1)}}=1$ *;on pose* $X=\dfrac{1}{2x(x+1)}$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-2\cos\left(\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}\right)}=-2$ *;on pose* $X=\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(x+1)}{x^2+x+1}=2$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{Arctan}(x+1)-\operatorname{Arctan}(x)}{\sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}=-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\right)$

Pour tout $x>0$ *on a :*

$$\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-2\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)+\left(\sqrt[4]{x^4+x^2}-x\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-2\left(\frac{x^3+x-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2}\right)+\left(\frac{\sqrt{x^4+x^2}-x^2}{\sqrt[4]{x^4+x^2}+x}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-2\left(\frac{x}{\left(\sqrt[3]{x^3+x}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2}\right)+\left(\frac{x^4+x^2-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x\right)\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-2\left(\frac{x}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\right)+\left(\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-2\left(\frac{1}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\right)+\left(\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\right)$$

Et ► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$

► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\right)=0}$

<u>Exercice 5</u>

$f(x)=\tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)$; $\left(\forall x\in I=\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\right)$

1) a) *Calculons* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x)$.

On a : $x \in I = \left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \pi\sqrt{1-x^2} < \pi$$

On pose $t = \pi\sqrt{1-x^2}$ *; alors* $x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-$; $t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$

D'où $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} \tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right) = \lim\limits_{t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(t) = -\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x) = -\infty}$

b) *On a :* $\left(\forall x \in I = \left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\right)$; $f(x) = \tan(u(x))$ *où* $u(x) = \pi\sqrt{1-x^2}$

La fonction polynôme $x \mapsto 1 - x^2$ *est continue positive sur I donc u est continue sur I et la fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *est continue sur* $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ *et* $u(I) \subset \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ *donc f est continue sur I*

2) a) $(\forall x \in I)$; $u'(x) = \frac{-2\pi x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\pi x}{\sqrt{1-x^2}}$

Comme ; $x \in I = \left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ *alors* $(\forall x \in I)$; $u'(x) \leq 0$.

Alors u est strictement décroissante sur I et la fonction $x \mapsto \tan(x)$ *est strictement croissante sur* $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ *et* $u(I) \subset \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

D'où : f est strictement décroissante sur I.

Conclusion :

f est continue strictement décroissante sur I; admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur l'intervalle* $J = f(I)$.

$$J = f\left(\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x); f(0)\right] = \left]-\infty;0\right]$$

b) Soit $x \in J = \left]-\infty;0\right]$ *; On a :* $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan\left(\pi\sqrt{1-y^2}\right) \\ y \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arctan(x) = \pi\sqrt{1-y^2} \\ y \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-y^2 = \left(\dfrac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2 \\ y \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1-\left(\dfrac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2 \\ y \in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-\left(\dfrac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2} \\ y \in I \end{cases}$$

On a : $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{\arctan(x)}{\pi} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < -\left(\frac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < 1-\left(\frac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2 < 1$$

Donc $(\forall x \in J)$; $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{1-\left(\frac{\arctan(x)}{\pi}\right)^2}}$