

Exercice 1

(les suites)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. a) montrons par récurrence que : $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1)$ (P)

- pour $n=0$ on a $u_0 = 2 > 1$ donc (P) est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que (P) est vraie pour n et montrons qu'elle l'est pour $(n+1)$

(P) est vraie, on a : $u_n > 1$

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc (P) est vraie pour $(n+1)$.

Conclusion : $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1)$

b) calculons $(u_{n+1} - u_n)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \frac{1}{16}u_n - \frac{16}{16}u_n + \frac{15}{16} \\ &= -\frac{16}{16}u_n + \frac{15}{16} \\ &= -\frac{15}{16}(u_n - 1) \end{aligned}$$

on a $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1)$ d'où
 $((\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n < 0)$ et on conclue
 que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante minorée par 1
 donc convergente.

2. $v_n = u_n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}(u_n - 1) \\ &= \frac{1}{16}v_n \end{aligned}$$

$$\text{D'où } ((\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} = \frac{1}{16}v_n)$$

On conclue que: la suite (u_n) est géométrique
 de raison $q = \frac{1}{16}$ et de premier terme $v_0 = 1$

$$\text{Et on a : } ((\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n)$$

b) on a : $v_n = u_n - 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

$$\text{Et comme } \left|\frac{1}{16}\right| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$



(la géométrie dans l'espace)

On considère les points A (1,3,4) et B (0,1,2).

1.a) Montrons que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ On a ; $\vec{AB}(0,1,-2)$ et $\vec{AC}(1,0,-2)$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{OA} \wedge \vec{OB} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ \vec{AB} \wedge \vec{AC} &= (6-4)\vec{i} - (2-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} \end{aligned}$$

$$D'où : \vec{OA} \wedge \vec{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

b) le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ est normal au plan (OAB) donc une équation cartésienne du plan s'écrit $2x - 2y + z + d = 0$ et puisque le point A (1,3,4) appartient au plan on a $2 \times 1 - 2 \times 3 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$ d'où une équation cartésienne du plan est $2x - 2y + z = 0$.

1. Montrons que $\Omega(3,-3,3)$ est le centre de(S) et que son rayon est $R=5$.

L'équation de (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$

$$\text{donc } (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 + 2 - 9 - 9 - 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

Ce qui montre que (S) a pour centre $\Omega(3,-3,3)$ et rayon $r=5$.

3. a) Calculons $d(\Omega, (ABC))$

$$\begin{aligned} d(\Omega, (ABC)) &= \frac{|2 \times (3) - 2 \times (-3) + (3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ \text{on a :} \quad &= \frac{|15|}{\sqrt{9}} = 5 \end{aligned}$$

on en déduit que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) car $d(\Omega, (ABC)) = 5 = R$

b) Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ le point de contact du plan (OAB) et la sphère (S)

$\vec{OH}$ est orthogonal au plan (OAB) et H appartient au plan

Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega H} = t\vec{n}$ (1)
$$\begin{cases} x_H - x_\Omega = 2t \\ y_H - y_\Omega = -2t \\ z_H - z_\Omega = t \end{cases}$$

et $2x_H - 2y_H + z_H = 0$ (2) En remplaçant x_H, y_H et z_H

de (1) dans (2) on obtient :

$$2(2t+3) - 2(-2t-3) + (t+3) = 0$$

$$\Rightarrow 9t + 15 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{5}{3}$$

D'où :
$$\begin{cases} x_H = 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 = -\frac{1}{3} \\ y_H = -2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 3 = \frac{1}{3} \\ z_H = \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Alors

$$H \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

(les nombres complexes)

1. Soit l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$

Le discriminant
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 41 = 64 - 164 = -100$$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 + 5i \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 - 5i$$

D'où $S = \{4 - 5i, 4 + 5i\}$

2. a) $a = 4 + 5i, b = 3 + 4i$ et $c = 6 + 7i$

donc :
$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{(6+7i)-(3+4i)}{(4+5i)-(3+4i)} = \frac{3+3i}{1+i} = 3 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{c-b}{a-b} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB}$$

On en déduit que les points A, B et C sont alignés.

b) On a $M' = R_{\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)}(M)$ Donc : $(z' - \omega) = (z - \omega)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$(z' - (4 + 7i)) = -i(z - (4 + 7i))$$

$$z' - (4 + 7i) = -i(z - 4 - 7i)$$

$$z' = -iz - 7 + 4 + 4i - 7i$$

$$z' = -iz - 3 + 11i$$

c) • calculons l'abscisse de l'image de C par R $z' = -iz - 3 + 11i$

Donc : $z'_C = -iz_C - 3 + 11i$

$$= -i(6 + 7i) - 3 + 11i$$

$$= 4 + 5i = a$$

Donc $z'_C = a$ alors

• Calculons $\frac{a - \omega}{c - \omega}$

on a : $A = R(C) \Leftrightarrow a - \omega = (c - \omega)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

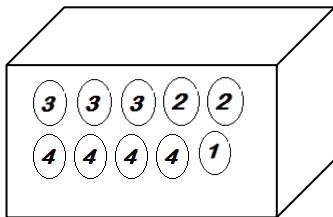
$$\Leftrightarrow \frac{a - \omega}{c - \omega} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a - \omega}{c - \omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

on conclue que : $\frac{a - \omega}{c - \omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 4

(les probabilités)



On tire de façon aléatoire successivement et sans remise 2 boules.

A « tirer 2 boules qui portent des chiffres paires »

$$\text{Card}\Omega = A_{10}^2 = 90$$

1. $\text{Card}A = A_6^2 = 30$ $p(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ Donc : $p(A) = \frac{1}{3}$

2. on répète l'expérience 3 fois, et X la variable aléatoire égale aux nombres de réalisations de l'événement A .

• $p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{4}{3^3} = \frac{4}{9}$

• X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3

et $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$ $p(X=i) = C_3^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}$

Donc : $p(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $p(X=1) = \frac{4}{9}$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{3 \times 3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{3 \times 3 \times 3} \times 1 = \frac{1}{27}$$

X_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$



(Etude de fonction)

I. $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln x$

1.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	$+\infty$

$$g(1) = \frac{2}{1} - 1 + 2 \ln 1$$

$$= 1$$

2. D'après le tableau de variation g admet 1 comme minimum sur

l'intervalle $]0, +\infty[$, on en déduit que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > g(1) = 1$

par conséquent $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$.

II. $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) = 3 - 3x + 2(x+1) \ln x$

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3 - 3x + 2(x+1) \ln x) = -\infty$

On déduit de ce résultat que la courbe (C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale au voisinage de $-\infty$.

2. a) montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On écrit $f(x)$ sous la forme: $f(x) = x \left[\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right]$

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right) = +\infty$

$\left(\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \right)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) D'après l'écriture précédente de $f(x)$ on déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Ce qui signifie que (C) admet une branche parabolique au Voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées

3. a) $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = (3 - 3x + 2(x+1) \ln x)'$

$$= -3 + 2 \ln x + 2(x+1) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln x$$

$$= g(x)$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = g(x)$$

b) d'après ce qui précède on a $\begin{cases} (\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0 \\ \text{et } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = g(x) \end{cases}$

donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) > 0$ alors f est croissante sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4. a) on a $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = g(x) \Rightarrow f''(x) = g'(x)$

et $g'(1) = 0$ avec $\begin{cases} g'(x) \leq 0 \quad (\forall x \in]0, 1]) \\ g'(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [1, +\infty[) \end{cases}$

$\Rightarrow f''(1) = 0$ et change de signe donc le point

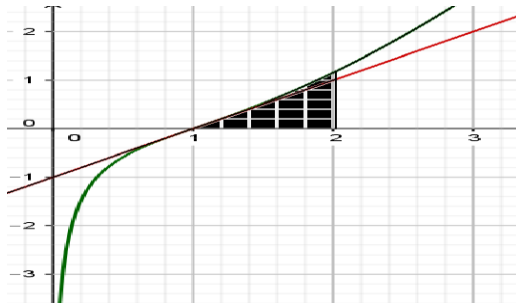
$I(1, 0)$ est un point d'inflexion de (C) .

b) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est l'équation de la tangente à (C) au point x_0

donc l'équation de la droite (T) tangente à (C)

au point I est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ d'où : $y = x - 1$

5. a) $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \left(2 + \frac{2^2}{4}\right) - \left(1 + \frac{1^2}{4}\right) = 3 - 1 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$



b) on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = (x+1) & v(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \end{cases}$

et on procède par intégration par partie on pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x+1 \rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_1^2 (x+1) \ln x \, dx &= \left[\ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\ln 2 \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) \right] - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \, dx = 4 \ln 2 - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

c) Pour faire a calculer on a $A = \int_1^2 |f(x)| dx$ et puisque

$$f(x) \geq 0 \text{ sur } [1, 2]$$

$$A = \left(\int_1^2 (3 - 3x + 2(x+1)\ln x) dx \right) u.a$$

$$= \left(\left[3x - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 + 2 \left(4\ln 2 - \frac{7}{4} \right) \right) u.a$$

$$A = \left(-\frac{3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2} \right) u.a = (8\ln 2 - 5) u.a$$

$$A = (32\ln 2 - 20) cm^2 \quad (u.a = 4cm^2)$$

6. on a $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 3 - 3x + 2(x+1)\ln x \geq 0$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

et graphiquement cette inéquation a pour solution l'intervalle $[1, +\infty[$.