Conseils en logique

■ *(1)* $(\exists x \in \mathbb{R} /\ \cos x = 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R} /\ \sin x = 0)$ *et (2)* $(\exists x \in \mathbb{R} /\ \cos x = 0 \ \ et \ \ \sin x = 0)$.

Faites attention Θ La proposition (1) est vraie la proposition (2) est fausse.

■ *Le raisonnement déductif (par implications successives)*

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ *est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.*

C'est le raisonnement de base que vous reproduirez un grand nombre de fois. Et même, vous tiendrez ce raisonnement tellement de fois (ou encore, vous serez tellement souvent dans la situation où l'hypothèse P est vraie) que vous risquez à terme de commettre une confusion entre la phrase simple « $P \Rightarrow Q$ est vraie » et la phrase plus complète « P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie ». Seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie. Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et
$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow \ldots \Rightarrow S \Rightarrow T$ *est vraie, et on a donc montré que T est vraie.*

■ *Le raisonnement par l'absurde*

Quand $P \Rightarrow Q$ *est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.*

Exemple.

Montrons que $\sqrt{2}$ *est irrationnel. Supposons par l'absurde que* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. *Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ *ou encore* $a^2 = 2b^2$. *Maintenant, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier* a^2 *(qui est à l'évidence supérieur à 2), le nombre premier 2 apparaît à un exposant pair (si* $a = 2^{\alpha} \times \ \ldots$ *alors,* $a^2 = 2^{2\alpha} \times \ldots$ *) alors qu'il apparaît à un exposant impair dans* $2b^2$ *(si* $b = 2\beta \times \ldots$ *alors,* $2b^2 = 2^{2\beta+1} \times \ldots$ *). Puisqu'on a l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à* 2 *, l'égalité des nombres* a^2 *et* $2b^2$ *est donc impossible. Par suite, l'hypothèse faite* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ *est absurde et on a montré (par l'absurde) que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

■ *Le raisonnement par contraposition*

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ *est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que* $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ *est une proposition vraie.*

Exemple.

Soient k et k ' deux entiers naturels non nuls. Montons que $(kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1)$. *Supposons que* $k \neq 1$ *ou* $k' \neq 1$. *Alors, on a (* $k \geq 2$ *et* $k' \geq 1$ *) ou (* $k \geq 1$ *et* $k' \geq 2$ *). Dans les deux cas, on a* $kk' \geq 2$ *et en particulier,* $kk' \neq 1$. *Donc,* $(k \neq 1 \ \ ou \ \ k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1)$. *Par contraposition, on a montré que*
$(kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1)$.

Erreurs classiques à ne pas commettre

⋄ Croire que le contraire de $x \geq 0$ *est* $x \leq 0$ *. Le contraire de* $x \geq 0$ *est* $x < 0$.

⋄ Confondre $\Rightarrow$ *et* $\Leftrightarrow$ *Une équivalence est constituée de deux implications (une est réciproque de l'autre).*

⋄ Refuser l'usage des quantificateurs $\forall$ *et* $\exists$*. Par exemple, la phrase* $\sin(x) \neq x$ *n'a pas de sens.*

Signifie-t-elle $(\forall x \in \mathbb{R}); \sin(x) \neq x$*, auquel cas elle est fausse car* $\sin(0) = 0$ *, ou signifie-t-elle que la fonction sinus n'est pas la fonction* $x \mapsto x$ *, auquel cas elle devrait être proprement écrite sous la forme* $\exists x \in \mathbb{R} /\ \sin(x) \neq x$ *ou aussi* $\sin \neq Id\mathbb{R}$ *? De manière générale, tout résultat contenant une variable doit être précédé du quantificateur adéquat.*

⋄ Placer n'importe où des quantificateurs. Par exemple, la phrase $f(x) \neq 0\ , \forall x \in \mathbb{R}$ *n'est pas vraiment correcte car dans cette phrase, la première fois que l'on parle de x (* $f(x) \neq 0$ *), on ne sait pas ce que x représente et on doit attendre encore le* $\forall x \in \mathbb{R}$ *pour savoir qu'il s'agit d'un réel ou encore, la première fois que l'on parle de x, x n'est pas défini. La bonne phrase est* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ *et se lit de manière naturelle : pour tout réel x, f(x) est différent de 0. Une phrase du genre « ∀ point M ∈ au plan, . . . » n'est pas correcte non plus, car elle mélange deux langages. On doit l'écrire ou bien «* $\forall x \in \mathbb{R}$ *», ou bien « pour tout point M du plan ». ⋄ Penser que les phrases* $\forall n \in N, \exists m \in N / m > n$ *et* $\exists m \in N / \forall n \in N, m > n$ *signifient la même chose et donc, ne prêter aucune attention à l'ordre des quantificateurs. ⋄ Penser que les phrases* $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) = 0$ *ou* $g(x) = 0$ *et ,* $(\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R};\ g(x) = 0)$ *signifient la même chose. Encore une fois, on ne peut pas distribuer* $\forall$ *sur ou.*