BAC BLANC N° 47 — **2éme Bac PC**

Exercice 1 : (04 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+6u_n} & (\forall n \in IN) \end{cases}$

0.75 1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $u_n \geq \dfrac{1}{3}$

1 b) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-3u_n)}{1+6u_n}$, puis déduire que $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

2) Pour tout $n \in IN$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 3$

0.75 a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ puis déterminer son premier terme v_0.

1 b) Exprimer v_n e fonction de n, puis déduire que : $\forall n \in IN$; $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, en justifiant votre réponse.

Exercice 2 : (05 points)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation: $(E): z^2 + 2z + 4 = 0$

0.75 a) Déterminer a et b les solutions de l'équation (E), avec $\operatorname{Im}(a) > 0$.

0.75 b) Ecrire a sous forme trigonométrique puis déduire que $a^3 = 8$.

2) Dans la plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On pose $B' = R_2(B)$ et $C' = R_1(C)$.

1 Montrer que : $z_{B'} = 2 + \sqrt{3} + 3i$ et $z_{C'} = \overline{z}_{B'}$, avec $z_{B'}$ = affixe de B' et $z_{C'}$ = affixe de C' .

0.75 3) I,J,K et L Sont les milieux respectifs des segments $[CB]$; $[BB']$; $[B'C']$ et $[C'C]$.

Montrer que l'affixe de J est $z_J = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, puis déduire que les points O,J et C sont alignés.

0.75 4) Montrer que : $1+z_J=i(1+z_L)$. Quelle est la nature du triangle IJL ? Justifier la réponse.

1 5) Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un carré.

Exercice 3 : (11 points)

Partie I:

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{-1}{4}xe^{\frac{-x}{2}}+1$

0.25 1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

0.5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}xe^{\frac{-x}{2}}=0$,puis déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

0.75 2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g'(x)=\frac{1}{8}(x-2)e^{\frac{-x}{2}}$; puis dresser le tableau des variations de g.

0.5 3) Déterminer le signe de $g(2)$; puis déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$.

Partie II:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{\frac{-x}{2}}+x$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0.75 1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.75 2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ et déterminer sa direction.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y=x$.

0.5 c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (Δ).

0.75 3) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=g(x)$, puis déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau des variations.

0.5 4) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$

0.75 5) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $-1<\alpha<0$.

0.75 b) Montrer que la courbe (C_f) est convexe sur $[2;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;2]$ et déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.

1 6) Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et la tangente (T).

0.75 7) a)-En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 xe^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{4(e-2)}{e}$

b) Déduire la surface du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$

0.75 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

0.5 b) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_{f^{-1}})$

c) Montrer que $(\forall x\in[-2;+\infty[)\,;\ f^{-1}(x)\le x$.

Partie III :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

0.5 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ -2\le u_n\le 0$.

0.5 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

0.5 3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, en justifiant la réponse.