EXERCICE 1

I- *On considère la fonction numérique f définie par:* $f(x)=\sqrt{1+e^{-x}}-x$

On note (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *d'unité 1 cm.*

1- Vérifier que $D_f=\mathbb{R}$ *est l'ensemble de définition de f.*

2- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) En déduire que la courbe (C_f) *présente une branche parabolique au voisinage* $-\infty$ *dont on précisera la direction.*

3- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$*, puis montrer que la droite* (D) *d'équation* $y=-x+1$ *est une asymptote à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$

b) Étudier la position relative de la courbe (C_f) *et de la droite* (D).

4- a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\left(1+\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5- Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet une seule solution* α *tel que* $1<\alpha<\ln(4)$.

6. Construire la courbe (C_f) *et la droite* (D) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7. a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie dans un intervalle J qu'on déterminera.*

b) Déterminer le sens de variations de f^{-1} *sur* J.

c) Montrer que f^{-1} *est dérivable en* $\sqrt{2}$ *et que* $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{8}}$

(Remarque que $f(0)=\sqrt{2}$*)*

d) Tracer dans le même repère, la courbe représentative de f^{-1}.

II - *On considère la fonction numérique g définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^{-x}\times f(x)$

On note (C_g) *la courbe représentative de g dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Montrer que pour de $[0;1]$: $g(x)>0$.

2- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\dfrac{2}{e}$

3- Calculer, en cm^2 *, l'aire du domaine délimité par la courbe* (C_g)*, les deux axes du repère et la droite d'équation* $x=1$.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4} \end{cases}$ *pour tout n de* IN

1. *Montrer que pour tout n de* IN ; $1 \leq u_n < 2$.
2. *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante. En déduire que* (u_n) *est convergente,*

3. *On pose pour tout n de* IN ; $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$

   a) Montrer que la suite (u_n) *est géométrique dont on précisera la raison.*

   b) En déduire l'expression de v_n *en fonction de n et que:* $(\forall n \in \mathrm{IN})$; $u_n = \dfrac{2^{n+2} - 3}{2^{n+1} - 2}$

4. *Déterminer la limite de la suite* (u_n)

EXERCICE 3

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* $2z - z^2 + 1 = 0$.
2. *On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives :* $a = 4$; $b = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $c = \overline{b}$

   a) Écrire chacun des nombres b et c sous forme trigonométrique.

   b) Montrer que : $\dfrac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. *Soit* z *l'affixe d'un point* M *et* z' *l'affixe du* M' *l'image de* M *par la rotation R de centre A et d'angle* $-\dfrac{\pi}{3}$.

   a) Montrer que : $z' = 4 + \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 4)$

   b) Montrer que le point D d'affixe $d = 4 + i2\sqrt{3}$ *est l'image de C par la rotation R*

4. *Montrer que ABCD est un losange.*