Problème :

1ère partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ *par :* $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$.

1- *Vérifier que :* $x^6-x^4-4=(x^2-2)(x^4+x^2+2)$

2- *Etudier le signe de la fonction g sur* $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2ème partie :

On considère la fonction numérique h définie sur $[-1;1]$ *par :* $h(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

1 – *Calculer* $h'(x)$ *pour tout* $x\in[-1;1]$.

2- *Donner le tableau de variations de h sur* $[-1;1]$

3- *Calculer* $h(1)$, *puis montrer que :* $(\forall x\in[-1;1])\ ;\ h(x)\leq 0$

3ème partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}-x+1 & si\ \ x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ f(x)=2\sqrt{x^2+3}-x-3 & si\ \ x\in[-1;1] \end{cases}$

1 - *Montrer que la fonction f est continue en* 1 *et* -1.

2- *Montrer que la courbe* (C_f) *admet un centre de symétrie* $\Omega(0;1)$ *sur l'intervalle* $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3- a - *Vérifier que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, *puis montrer que la droite* (D_1) *d'équation* $y=-x+3$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$

b - *En déduire par symétrie que la droite* (D_2) *d'équation* $y=-x-1$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$

4- *Etudier la dérivabilité de f en* 1 *à droite et interpréter le résultat géométriquement*

5- a – *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b - *En déduire le signe de* $f'(x)$ *sur* $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

6- a – *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\in[-1;1]$.

b - *En déduire le signe de* $f'(x)$ *sur* $[-1;1]$.

7- *Dresser le tableau de variation de f sur* $\mathbb{R}$.

8- *Donner les équations des demi-tangentes à gauche de* 1 *et à droite de* -1 .

9- *Montrer que :* $\left(\exists!\alpha\in\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right)\ /\ f(\alpha)=0$ *et que :* $2<\alpha<3$

10- *Tracer* (C_f) *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

<u>4ème partie</u> *:*

Soit u la restriction de f à l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

1 - Montrer que u admet une fonction réciproque u^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

2- Calculer $\left(u^{-1}\right)'(0)$ *en fonction de* α .

3- Tracer $\left(C_{u^{-1}}\right)$ *dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.