Étude de fonction exponentielle et nombres complexes

2eme bac PC-SVT

Problème 1

Partie 1

Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=x+2-e^x$

1- Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$

2- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0;+\infty[$ et que $\frac{12}{11}<\alpha<\frac{6}{5}$

3- Déterminer le signe de $g(x)=0$ sur $[0;+\infty[$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis déduire une interprétation géométrique de ce résultat

2- a) Montre que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

b) Déduire les variations de f ; puis dresser le tableau de variation de f.

3- a) Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=0$ et est $y=x$.

b) On pose : $h(x)=1-x-e^{-x}$

Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $h(x)\le 0$

c) Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f(x)-x=\frac{e^x(1+x)h(x)}{xe^x+1}$; puis déduire la position relative de la droite (Δ) d'équation $y=x$.

4- Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f(x)\le\frac{1}{1+\alpha}$.

5- justifier que : $f''(x)\le 0$; pour tout $x\in[0;+\infty[$

6- Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Problème 2

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ définie par : $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$.

1- **Étude d'une fonction auxiliaire**

WWW.GUESSMATHS.CO

a) Soit la fonction g définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ définie par : $g(x)=x^2e^x-1$. Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

Démontrer que α appartient à l'intervalle $]0,703;0,704[$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x ; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}$

e) Justifier que $3,43<m<3,45$.

Exercice 1

1) a) Résoudre dans l'équation $z^2-2z+2=0$

b) écrire les solutions sous forme trigonométrique

c) En déduire les solutions de l'équation $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2) Dans le plan complexe on considère les points A ; B et C d'affixes respectives $a=1+i$; $b=1-i$ et $c=2b$.

a) Donner la forme algébrique du nombre c

b) Montrer que les points A, B, C appartiennent au cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $R=\sqrt{5}$

c) Déterminer la nature du triangle IAC

d) Déterminer l'affixe du point E image du point O par la translation de vecteur $2\overline{IC}$.

e) Déterminer l'affixe du point D image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

f) Montrer que $(AB)\perp(CD)$

WWW.GUESSMATHS.CO