

Exercice 1

- 1) Calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- 2) Montrer que $\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 14$.

Exercice 2

Démontrer les identités suivantes en précisant à chaque fois leur domaine de définition

- 1) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$
- 2) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$
- 3) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 3

Montrer que : $\frac{\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10}{\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)} = 2\cos(x)$.

Exercice 4

Pour tout réel x on pose $\varphi(x) = \cos(x)\cos(2x)\cos(4x)$

- 1) Montrer que $8\sin(x)\varphi(x) = \sin(8x)$
- 2) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$.

Exercice 5

- 1) Montrer que Pour tout réel x on a : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ et $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$
- 2) Montrer que Pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\frac{\sin(2x) - 1}{\cos(2x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
- 3) En déduire que Pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\frac{\sin(2x) - 1}{\cos(2x)} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 6

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, les équations et les inéquations suivantes :

- 1) $\cos 2x + \sin 2x - 1 = 0$
- 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$
- 3) $\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq \sqrt{2}$
- 4) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) < -1$

Exercice 7

1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $S(x) = \cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x)$

a) Montrer que Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a: $\cos^2(x) + \cos^2(3x) = \frac{1}{2}(2 + \cos(2x) + \cos(6x))$

b) Montrer que Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $S(x) = 2\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x) + 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $S(x) = 1$

3) Calculer $S\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Exercice 8

1) Montrer que Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

2) Vérifier que $\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ est solution de l'équation : $4X^3 - 3X + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

3) En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ est un nombre irrationnel.

Exercice 9

Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) \cdot \sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{30}\right) = \frac{1}{16}$