Exercice 1

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle : $y' = -2y + 5$ *et que vérifie :* $f(0) = \frac{11}{2}$

Exercice 2

1. On considère les deux équations différentielles (

(1) $y' - 3y = e^{5x}$ **(2)** $y' = 3y$

a) Versifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{5x}$ *est solution de l'équation* **(1)**

b) Montrer que la fonction of est solution de l'équation **(1)** *si et seulement si* $f - g$ *est solution de l'équation* **(2)**

c) Déduire les solutions de l'équation **(1)**.

2. On considère l'équation différentielle **(3)** $y' + 4y = 8x - 10$

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $g : x \mapsto ax + b$ *soit solution de l'équation***(3)**

b) Déduire les solutions de l'équation **(3)**

Exercice 3

On considère les deux équations différentielles :

(1) $y'' - 3y' + 2y = 3\sin(2x) - \cos(2x)$ **(2)** $y'' - 3y' + 2y = 0$

1) Résoudre l'équation **(2)**.

2) a) Montrer que l'équation $g : x \mapsto \frac{1}{2}\cos(2x)$ *est solution de l'équation* **(1)**

b) Montrer que l'équation la fonction f est solution de l'équation **(1)** *si et seulement si* $f - g$ *est solution de l'équation* **(2)**

c) Déduire les solutions de l'équation **(1)**

d) Déterminer la solution h de l'équation **(1)** *qui vérifie* $h(0) = h'(0) = 1$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante : $(E): y'' + y' + my = 0$ *; tel que* $m \in \mathbb{R}$

1) Résoudre l'équation (E) *dans les cas suivants :*

a) $m = \frac{1}{4}$ *b)* $m = 2$ *c)* $m = -2$

2) On considère que $m = -2$

Résoudre l'équation (E) *si* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$

Exercice 5

1) Résoudre l'équation différentielle suivante. $(E): y'' + y' + \frac{1}{2}y = \sin x$

2) Déterminer la fonction of solution de (E) *qui vérifie* $f(0) = f'(0) = 0$

Exercice 6

On considère la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$

1) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ *; puis calculer* $G'(x)$.

2) Montrer que G est impaire.

3) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ *;* $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

b) Déduire $\lim_{x\to+\infty} G(x)$

4) a) Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

b) soit F sa fonction réciproque ; montrer F est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et que pour tout* $x \in \mathbb{R}$

on a : $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4F^2(x)}$

c) Déduire que F est deux fois dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ *;* $F''(x) - F(x) = 0$.

5) a) Calculer $F(0)$ *et* $F'(0)$.

6) Déduire $F(x)$ *puis* $G(x)$ *en fonction de x.*