**Série n ° 5 d'exercices sur « étude de fonctions logarithmes »** **Terminale S**

## Exercice 1 :

### Partie A :

1) Soit $f(x)=1+e^{x}(1-x)$

Et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Montrer que $f'(x)=xe^{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $(C_f)$ admet une branche infinie de direction $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

d) Montre que $D : y=1$ asymptote au voisinage de $-\infty$.

e) Montrer que $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha\in[1;2]$.

2) a) Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$, montrer que g admet une fonction réciproque $g^{-1}$ sur un intervalle que l'on précisera, et préciser son sens de variation.

b) Tracer $(C_g)$ et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère

3) a) calculer $\int_a^b xe^{x}dx$ puis comparer : $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ et $\int_{\alpha}^{2} f(x)dx$ .

b) calculer, en fonction de $\alpha$, l'aire du domaine délimité par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $x=2$.

### Partie B :

1) Soit $h(x)=\dfrac{5x}{e^{x}+1}$ pour tout x positive

a) Montrer que $h'(x)=\dfrac{5f(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Tracer $(C_h)$ on précisera la demi tangente à l'origine

**Exercice 2** :

Soit la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

1) a) prouver que, pour tout réel $t\geq 0$, $1-t\leq \dfrac{1}{1+t}\leq 1$.

b) En intégrant ces inégalités, établir que, pour tout $x\geq 0$ ; $x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

2) Soit $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$ avec $x\in[0;+\infty[$

a) Montrer que g est dérivable et calculer g'.

b) Prouver que , pour tout $x\geq 0$ ; $0\leq g'(x)\leq \dfrac{x^2}{2}$

c) En déduire que $0\leq g(x)\leq \dfrac{x^3}{12}$

3) a) calculer $f'(x)$

b) établir que pour tout $x\geq 0$, $g(x)\leq \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ ; puis en déduire le sens de variation de f.

4) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ puis déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$, donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 et présider la position de $(C_f)$ par rapport à T.

5) dresser le tableau de variation de f puis tracer et T.

**Exercice 3** :

**Partie A**

Soit $g(x)=e^x+x-5$

1) Etudier g

2) Calculer $g(0)$ et $g(2)$ montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une seule solution $\alpha$

3) Justifier que $1{,}30\leq\alpha\leq 1{,}31$.

## Partie B

Soit la fonction *f* définie sur $\left]-\infty;5\right[$ par : $f(x)=\ln(5-x)$.

$(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

1) Dresser le tableau de variation de *f*

2) Montrer que $f(\alpha)=\alpha$.

## Partie C

1) Tracer $(C_f)$ et Hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées $(x;y)$ tels que : $\begin{cases}\alpha\le x\le 4\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ On notera $(\Delta)$ cette partie A.

2) a) Montrer que : $\dfrac{x}{x-5}=1+\dfrac{5}{x-5}$

b) Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha}^{4}\frac{x}{x-5}\,dx=4-6\alpha$

Montrer que l'aire A de la partie $(\Delta)$ est $A=-\alpha^2+6\alpha-4$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

## Exercice 4 :

Soit *f* la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}$

$(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm)

## Partie A

Etude de *f*

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b) dresser le tableau de variation de *f*

2) Tracer $(C_f)$

3) a) Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)$ ; $e^t\ge 1+t$

b) Déduire que pour $x>0$ ; $f(x)\ge 1+\dfrac{1}{2x}$

4) Soit $k\ge 1$, on note $A(k)$ l'aire de la partie du plan déterminée par $(C_f)$ , son asymptote horizontale et les droites d'équations $x=1$ et $x=k$ (l'unité graphique 2 cm )

a) Exprimer $A(k)$ sous forme intégrale

b) Démontrer que pour tout $k \geq 1$ on a : $A(k) \geq 2\ln k$

c) L'aire $A(k)$ admet-elle une limite finie lorsque k tend vert $+\infty$

**Partie B**

Soit $g(x) = f(x) - x$

1) Etudier g sur $]0\,;+\infty[$

2) a) Montrer que $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha > 0$

b) Etablir que $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

**Exercice 5** :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^{x}$

on note par C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4 cm)

Etude de f

1) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ et déduire son signe

2) Dresser le tableau de variation de f '

3) Montrer que $f'(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ tel que $0{,}79 < \alpha < 0{,}80$

4) Etablir le tableau de variation de f

5) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique entre $\beta$ tel que $\frac{3}{2} < \beta < 2$

6) Construire C

7) a) Calculer $\int_0^u xe^{x}dx$ ; pour tout $u > 0$

b) Déduire l'expression $I_u = \int_0^u f(x)dx$ en fonction de u

d) montrer que $e^{\beta} = \frac{4\beta + 1}{\beta}$ et déduire que $I_{\beta} = 2\beta^2 + \beta + 1 + \frac{1}{\beta}$

e) Soit $h(x) = \ln(4x + 1)$, montrer $h(\beta) = \beta$

**Exercice 6** :

**Partie A**

Soit $g(x) = 1 + x + e^{x}$

1) Etudier g

2) Montrer que $g(x)=0$ admet une seul solution $\alpha$ telle que $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$.

3) Préciser le signe de $g(x)$

**Partie B**

Soit f la fonction définie sur par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$, on désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) dresser le tableau de variation de f

b) montrer que $f(\alpha)=1+\alpha$

c) montrer que $D: y=x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

d) Ecrire l'équation de la tangente T à C au point $O(0;0)$

Etudier la position de T par rapport à C

e)Tracer C

2) soit le point $H(x;0)$, la parallèle à l'axe $(Oy)$ passant par H coupe C en M et la droite D en N On note $K(x)=MN$

a) montrer que $K(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$

b) montrer que $K'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}g(-x)$

c) Déduire que MN est maximale en $(-\alpha)$

3) Montrer que $f(-\alpha)=1$

4) Montrer que la tangente au point A de C d'abscisse $(-\alpha)$ est parallèle à D

5) a) Montrer que pour tout $x\geq 1$; on a : $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

b) Déduire un encadrement de l'aire du plan limité par la courbe C, l'axe $(Ox)$ et les droites d'équation : $x=1$ et $x=-\alpha$

**Exercice 7** :

**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+\dfrac{e^x}{1+e^x}$ et $(C_f)$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1).a).Montrer que $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$

b).Vérifier que $\Omega\in\left(C_f\right)$.Conclure.

c). Déterminer une équation de la tangente T à au point $\Omega$

2).Etudier f et tracer$\left(C_f\right)$.

3) .Déterminer le nombre de solutions de l'équation :f x =m où m∈IR

4).a).Soit $\alpha>2$.Calculer $A(\alpha)$l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations

$x=\ln 2$ ; $x=\ln\alpha$ et la droite $D$ : $y=2x+1$ et la courbe $\left(C_f\right)$

b).Calculer alors la limite de $A(\alpha)$quand x tend vers$+\infty$

**Partie B**

Soit $\left(I_n\right)$la suite définie sur$\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}dx$

1).Calculer $I_1$

2).Montrer que $\left(I_n\right)$est décroissante

3).a).Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ ; $\frac{1}{1+n}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{1+n}$

b).En déduire que $\left(I_n\right)$est convergente et calculer sa limite.

4).a).Montrer que $\left(\forall x\in[0;1]\right)$on a : $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\leq\frac{1-x}{2}$

b). Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{1+n}-\frac{1}{n^2}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{1+n}$

c). En déduire que $\left(I_n\right)$est convergente et calculer sa limite .