

EXERCICE 1

Partie I

Soit f la fonction unique de sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la suite représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Étudier la continuité de f en 0

2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats obtenus

3- Etudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $-\infty$

4- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus

5- a) Montre que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(4\sqrt{x}-3)}{2}$; puis montrer que f est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{9}{16}\right[$ et qu'elle est strictement croissante sur $\left]\frac{9}{16}; +\infty\right[$

b) Montrer que pour tout $x < 0$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variations de f

6) Tracer (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie-II

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$

1- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J

3- Calculer $g\left(-\frac{4}{3}\right)$ et en déduire $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

4- Dresser le tableau de variation de g^{-1}

5- Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .

EXERCICE 2

Partie I

On considère la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 2 + \frac{x+3}{x^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- Montrer que $D_f = \mathbb{R}^*$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 2- Etudier les branches infinies de (C_f)
- 3- Etudier la dérivabilité de f en -1 et interpréter les résultats géométriquement.
- 4- Montrer que : $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[; f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x^3}$
- 5- Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$
- 6- Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty; -1[$
- 7- Dresser le tableau de variations de f .
- 8- Montrer que la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et que $-2 < \alpha < -1$
- 9- Donner le tableau de signe de f sur D_f
- 10- Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ sur l'intervalle $]-1; +\infty[$
- 11- Déterminer $f''(x)$ sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$; puis déduire la concavité de f sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
- 12- Tracer la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 13- Déduire la construction de (C_g) la courbe de g telle que : $g(x) = -f(|x|)$

Partie II

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1[$

- 1- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera
- 2- Calculer $h(-1)$ et montrer que h est dérivable à droite en -1 en déduire $(h^{-1})'(-1)$
- 3- Déduire le tableau de variation de h^{-1}
- 4- Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- La fonction f est-elle continue en 1

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus

3- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$: que peut-on déduire

4- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$: que peut-on déduire

5- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, puis interpréter graphiquement résultats obtenus

a) Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x > 1 \\ f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} & \text{si } x < 1 \text{ et } x \neq 0 \end{cases}$$

b) Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}^*$

6- a) Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sur $]-\infty; 0[$

b) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x} & \text{si } x < 3 \\ f(x) = (x-3)\sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- Etudier les branches infinies de

3- Etudier la dérivabilité de la fonction f en 3, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4- Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-3x+6}{2\sqrt{3-x}} & \text{si } x < 3 \\ f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
 ; puis donner le tableau de variation de f

5- Montrer que :
$$\begin{cases} f''(x) = \frac{3(x-4)}{4(3-x)\sqrt{3-x}} & \text{si } x < 3 \\ f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-3}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Puis étudier la concavité de la courbe (C_f)

6) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.