



Série 4 d'exercices non corrigés sur les suites

Exercice 1 :

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dans chaque cas suivant :

$$1) u_n = (n-1) \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n$$

$$2) u_n = \frac{3^n + 4^n}{7^n}$$

$$3) u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$4) u_n = 3^n + \sin n$$

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 4$

Et soit $v_n = u_n - 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.

b-Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c-Déterminer la limite de (v_n) et de (u_n) .

2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$

Et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = \frac{12u_n - 9}{4u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 3$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{3}{2}$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c-En déduire que (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$

a- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3n+6}{2n+2}$

c-En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$; $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

Et soit $v_n = u_n - 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer ses caractéristiques.

b-Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c-Déterminer la limite de (v_n) et de (u_n) .

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+2} = \frac{8}{7}u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0, u_1 = 1$

Et soit $v_n = u_{n+1} - u_n ; (\forall n \in \mathbb{N})$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

Exprimer S_n en fonction de n

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

4) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -\frac{5}{4}$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : -2 < u_n \leq -1$

b-Montrer que la suite (u_n) est convergente.

c) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} + 2 \leq \frac{3}{4}(u_n + 2)$

3) En déduire que : $u_n + 2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} ; \forall n \in \mathbb{N}$

4) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} ; \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 4$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 3$

b-Étudier la monotonie de la suite (u_n)

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} , u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

3) En déduire que : $u_n - 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$

4) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 8 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{u_n} + u_n \right) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \sqrt{3}$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente

2) a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{3})$

b - En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - \sqrt{3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - \sqrt{3})$

c- Calculer la limite de (u_n) .

Exercice 9 :

Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$ et $u_0 = 0$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n < 4$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} (4 - u_n)$

b- Étudier la monotonie de la suite (u_n)

c- Déduire que (u_n) est convergente.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

4) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

1) Montrer que la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $[0, 1]$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

a- Montrer que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{9x}{x^3 + 6}$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

- 1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $I = [0, \sqrt[3]{3}]$ et déterminer $f(I)$
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3}$
- 3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 4) Dédire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 :

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_1 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = u_n + \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \geq 2) : u_n > 2$
- 2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$
- 3) Soit α la solution de l'équation : $\sqrt{1+x} = x$
 - a- Déterminer la valeur de α
 - b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \geq \alpha n$
 - c- Dédire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.