Exercice 01:(04pts)

➩ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = e^{2x} - 6e^{x} + 8.$$

0,5 1)- a)- Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R});(t-2)(t-4) = t^2 - 6t + 8$.

1 b)- En déduire dans $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2)- Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 6e^{x} + 8x + \frac{11}{2}$.

1 a)- Vérifier que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x_0 = 0$.

1,5 b)- Justifier que F est décroissante sur $[\ln 2; \ln 4]$ et croissante sur les intervalles $]-\infty; \ln 2]$ et $[\ln 4; +\infty[$.

Exercice 02:(06pts)

➩ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 6 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}.$$

0,75 1)- a)- Calculer u_1 et u_2.

0,75 b)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n > \frac{1}{2}$.

0,5 2)- a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$.

1 b)- Montrer que est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante puis en déduire qu'elle est convergente .

3)- On pose : $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5 a)- Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

0,75 b)- Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,75 c)- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \frac{1}{2}\left(11.\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$. Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$.

1 ✓ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);S_n = \frac{n}{2} + \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$. Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 03:(10pts)

➩ Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[);\ f(x) = 3 - \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}.$$

0,75 1)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

0,5 b)- En déduire que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale que l'on déterminera .

1 2)- a)- Démontrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

0,5 b)- En déduire que (C_f) admet une asymptote verticale que l'on déterminera .

1 3)- a)- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[);\ f'(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$.

1,5 b)- En déduire la monotonie de f sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$. Puis dresser son tableau de variation complet .

0,75 c)- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = \sqrt{e}$.

1 4)- a)- Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[);\ f''(x) = \frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$.

1,5 b)- En déduire que (C_f) est convexe sur $]0;\sqrt{e}]$ et concave sur $[\sqrt{e};+\infty[$. Puis déterminer le point d'inflexion de (C_f).

1,5 5)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Fin Du Sujet .