



Exercice 1 (3pts)

Montier que :

-) $(\forall y \in]2; +\infty[) ; x \neq y \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} \neq \frac{y^2}{y-1}$
-) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$

Exercice 2 (4pts)

On considère les ensembles :
$$\begin{cases} E = \left\{ a + \frac{1}{a} ; a \in \mathbb{R}^* \right\} \\ F = \{ x \in \mathbb{R} / |x| \geq 2 \} \end{cases}$$

1 - Vérifier que $1 \notin E$ et que $\frac{4}{\sqrt{3}} \in E$

2 - a- montrer que : $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 ; (\forall a \in \mathbb{R}^*)$

b- En déduire que : $E \subset F$

3- Montres que : $E = F$.

Exercice 3 (3pts)

Détermine en extension les ensembles suivants :

$$A = \{ (x; y) \in \mathbb{N}^2 / 2x - y + 2xy = 7 \}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$C = \{ (-1)^n + (-1)^m / (n; m) \in \mathbb{N}^2 \}$$

Exercice 4 (5pts)

$$\mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

On considère l'application : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

1- a- Vérifier que : $f(-1-x) = f(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b- f est-elle injective? justifier votre réponse

2- a- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2$

b- f est-elle surjective? Justifier

3 - Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset \left] 0; \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$

4 - soit g l'application : $g : \mathbb{R} \rightarrow \left] 0; \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$
 $x \mapsto f(x)$

Montrer que g est bijective

Exercice 5 (4pts)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + x$

1) a) Montrer que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) ; x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 > 0$

b) Dédurre que f est injective.

2) Déterminer $f^{-1}([3; +\infty[)$