

guessmaths

Série n° 8 d'exercices sur Etude de fonction

2ème Bac PC

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{2x - |x+1|}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
3. Etudier dérivabilité de f en -1 .
4. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Correction

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - |x+1| \neq 0\}$

► Si $x \geq -1 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$$D_f^1 = \{x \in \mathbb{R} / 2x - (x+1) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$$

$$= [-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

► Si $x \leq -1 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$D_f^2 = \{x \in \mathbb{R} / 2x + (x+1) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 3x + 1 \neq 0\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{1}{3}\right\}$$

$$=]-\infty; -1]$$

Donc $D_f = D_f^1 \cup D_f^2 =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2. La fonction $x \mapsto x$ est continue sur en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$; la fonction $x \mapsto 2x - |x+1|$ est continue sur en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ de plus elle ne s'annule pas sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ donc f est continue sur en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$; alors on étudiera la continuité de f à en 1.

On a pour x dans un intervalle de contenant 1 et différent de 1 :

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x - |x+1|} &= \frac{x}{2x - (x+1)} \quad (\text{car } x+1 > 0) \\ &= \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$

Par suite f n'est pas continue en 1.

3. ► Soit $x > -1$; alors $f(x) = \frac{x}{x-1}$ et $f(-1) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}D'où \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{2}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x - x + 1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors f est dérivable à droite en -1 .

► Soit $x < -1$; alors $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ et $f(-1) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 D'o\grave{u} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{x}{3x+1} - \frac{1}{2}}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - (3x+1)}{(3x+1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x-1}{(3x+1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{3x+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Alors f est dérivable à gauche en -1 .

$$Donc \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

Par suite f n'est pas dérivable en -1 .

$$4. f \text{ est définie par intervalles comme suit : } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-1} & \text{si } x \in [-1; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(x) = \frac{x}{3x+1} & \text{si } x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

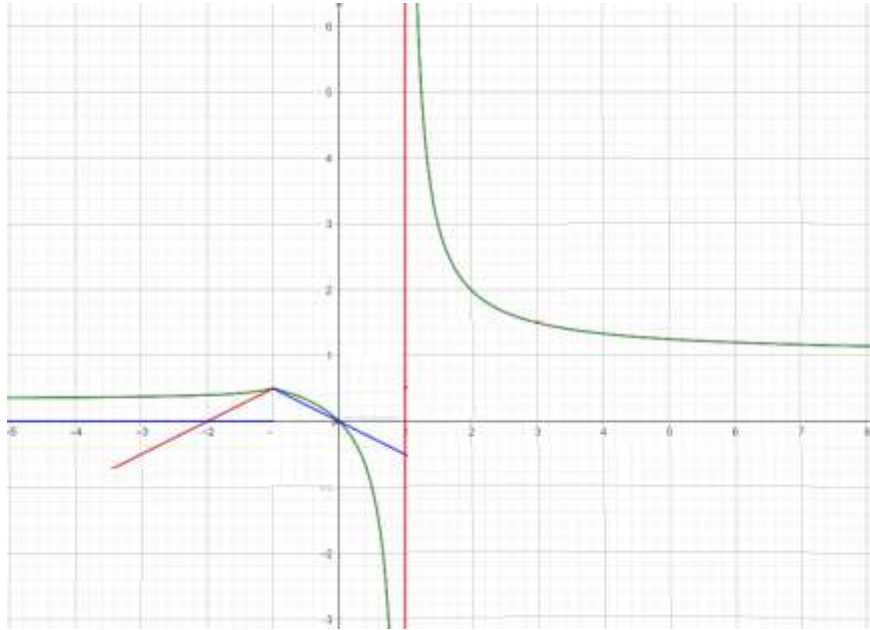
$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Pour } x \in [-1; 1[\cup]1; +\infty[; \text{ on a : } f'(x) &= \left(\frac{x}{x-1} \right)' \\
 &= \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{-1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-1; 1[$ et $]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Pour } x \in]-\infty; -1[; \text{ on a : } f'(x) &= \left(\frac{x}{3x+1} \right)' \\
 &= \frac{3x+1-3x}{(3x+1)^2} \\
 &= \frac{1}{(3x+1)^2}
 \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$

5. Construction de (C_f)



Exercice 2

Soit $f : x \mapsto -\frac{2}{x-1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier les variations de f .
3. Tracer la courbe C .
4. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2; 4]$, $J = [-1; 0]$ et $K =]-\infty; 3[$.
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-\infty; 0[$.

Correction

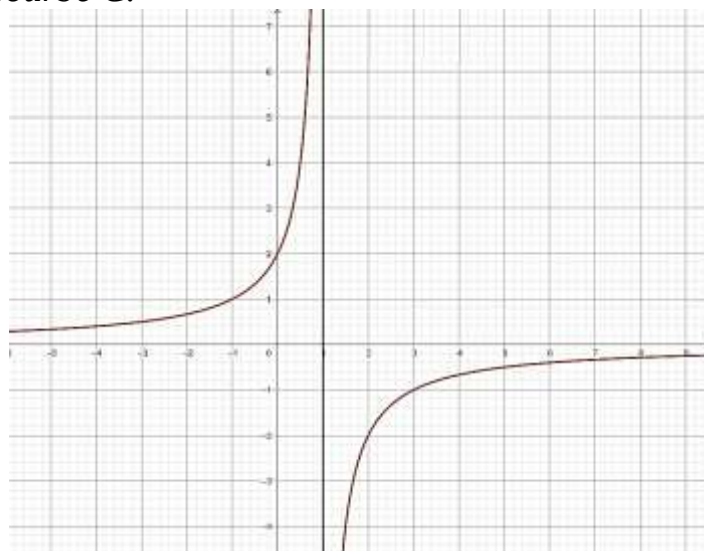
$$\begin{aligned} 1. D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} \\ &=]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\end{aligned}$$

2. f est dérivable sur son domaine de définition comme inverse d'une fonction dérivable et

$$\begin{aligned} \text{qui ne s'annule pas sur }]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\text{ ; et on a : } f'(x) &= \left(-\frac{2}{x-1} \right)' \\ &= \frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur son domaine de définition.

3. Construction de la courbe C.



4. ► f est continue strictement croissante sur $I = [2; 4]$; donc $f([2; 4]) = [f(2); f(4)]$

$$f(2) = -\frac{2}{2-1} = -2 ; f(4) = -\frac{2}{4-1} = -\frac{2}{3} ; \text{d'où } f([2; 4]) = \left[-2; -\frac{2}{3}\right]$$

► f est continue strictement croissante sur $J = [-1; 0]$; donc $f([-1; 0]) = [f(-1); f(0)]$

$$f(-1) = -\frac{2}{-1-1} = 1 ; f(0) = -\frac{2}{0-1} = 2 ; \text{d'où } f([-1; 0]) = [1; 2]$$

► Comme $1 \in]-\infty; 3[$ et f n'est pas définie en 1 alors il faut calculer l'image de chacun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $] 1; 3[$

$$\bullet f(]-\infty; 1[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right[\text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x-1} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2}{x-1} = +\infty ; \text{d'où } f(]-\infty; 1[) =]0; +\infty[$$

$$\bullet f(]1; 3[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); f(3) \right[\text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{x-1} = -\infty ; f(3) = -\frac{2}{3-1} = -1$$

$$\text{D'où } f(]1; 3[) =]-\infty; -1[$$

$$\text{Par suite } f(]-\infty; 3[) =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

5. Pour déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $] -\infty; 0[$; il

suffit de résoudre l'inéquation $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x-1} < 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-\infty; 0[$ est l'intervalle $]1; +\infty[$

Exercice 3

Soit f le trinôme défini par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f ; puis tracer la courbe C .
2. Quelles sont les images par f de $2; -2; 0; \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [1; 3]$, $J = [-2; 2]$ et $K =]-\infty; 0]$.
4. Quels sont les antécédents éventuels par f de $0, 7$ et 9 ?
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[7; 13]$.

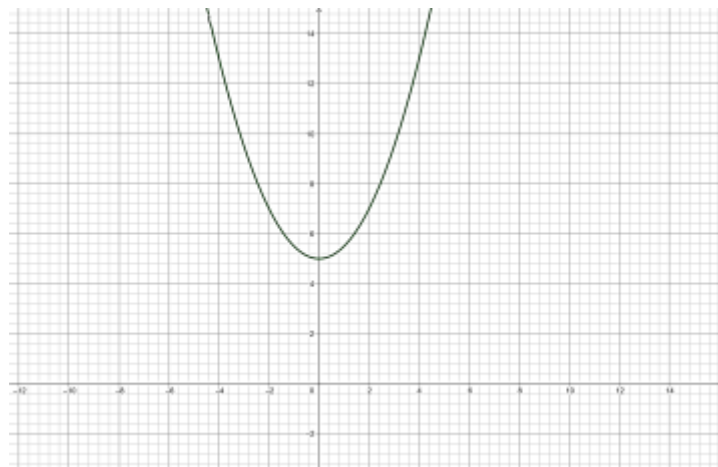
Correction

1. f est un polynôme de 2^{ème} degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

Sa courbe est une parabole de sommet $I\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (0; f(0)) = (0; 5)$

Construction de la courbe C.



2. On calcule les images par f de $2; -2; 0; \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; on utilise le fait que f est paire

- $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 + 5 = 7$

- $f(-2) = f(2) = 7$

- $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}^2 + 5 = 6$

- $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 6$

3. ► f est continue strictement croissante sur $I = [1; 3]$; donc $f(I) = [f(1); f(3)]$

$$f(1) = \frac{11}{2} ; f(3) = \frac{19}{2} ; \text{d'où } f(I) = \left[\frac{11}{2}; \frac{19}{2} \right]$$

► f est continue strictement croissante sur $[0; 2]$; $f([0; 2]) = [f(0); f(2)] = [5; 7]$

f est continue strictement décroissante sur $[-2; 0]$;

$$f([-2; 0]) = [f(0); f(-2)] = [5; 7] \quad .$$

$$\text{Donc } f([-2; 2]) = [5; 7]$$

► f est continue strictement croissante sur $K =]-\infty; 0]$;

$$f(]-\infty; 0]) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = [5; +\infty[$$

4. ► Pour déterminer les antécédents par f de $0,7$; il faut résoudre l'équation $f(x) = 0,7$

Or 5 est une valeur minimale pour f donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \geq 5$

D'où l'équation $f(x) = 0,7$ n'admet pas de solution ; par suite $0,7$ n'admet pas d'antécédents

► Pour déterminer les antécédents par f de 9 ; il faut résoudre l'équation $f(x) = 9$

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 5 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2}$$

Donc les antécédents par f de 9 sont $2\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2}$.

5. Pour déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[7; 13]$.

$$7 \leq f(x) \leq 13 \Leftrightarrow 7 \leq \frac{1}{2}x^2 + 5 \leq 13$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{2}x^2 \leq 7$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 14$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq \sqrt{14} \text{ ou } -\sqrt{14} \leq x \leq -2$$

Donc l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[7;13]$ est

$$[-\sqrt{14}; -2] \cup [2; \sqrt{14}]$$

Exercice 4

Soit f le trinôme défini par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Tracer la courbe C .
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2;3]$, $J = [0;3]$ et $K = [0;+\infty[$.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2;6]$.

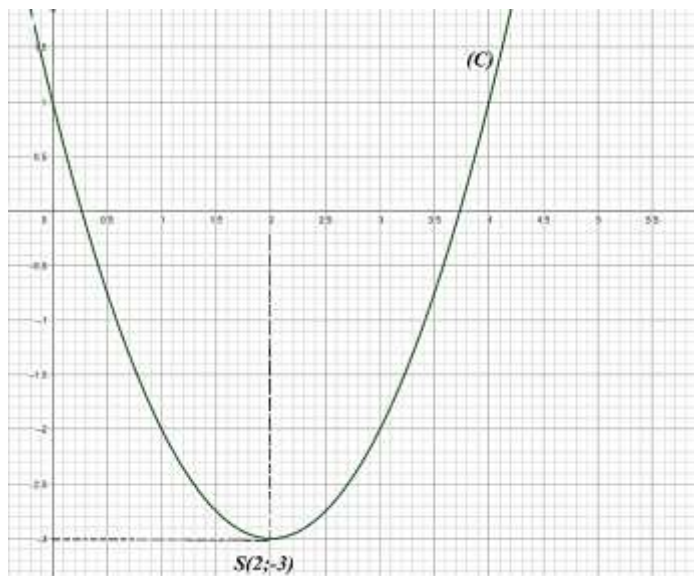
Correction

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

1. f est une fonction polynomiale de deuxième degré de la forme $ax^2 + bx + c$ où $a=1$ et $b=-4$; donc sa courbe est une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (2; f(2))$

f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Construction de la courbe C .



2. f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) donc continue sur chacun des intervalles $I = [2;3]$, $J = [0;3]$ et $K = [0;+\infty[$.

► de plus f est croissante sur $[2;+\infty[$; donc croissante sur $I = [2;3]$; d'où :

$$f([2;3]) = [f(2); f(3)] = [-3; -2]$$

► f est décroissante sur $[0;2]$ et croissante sur $[2;3]$; donc

$$f([0;2]) = [f(2); f(0)] = [-3;1] \text{ et } f([2;3]) = [-3;-2]$$

$$\text{D'où } f([0;3]) = [-3;1] \cup [-3;-2] = [-3;1]$$

3. Pour déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2;6]$; il faut résoudre la double inéquation $-2 \leq f(x) \leq 6$.

$$\text{On a : } -2 \leq f(x) \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 4x + 1 \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 - 4x + 4 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (x-2)^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x-2 \leq 3 \text{ ou } -3 \leq x-2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5 \text{ ou } -1 \leq x \leq 1$$

Donc l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2;6]$ est l'ensemble

$$S = [-1;1] \cup [3;5]$$

Exercice 5

$$\text{Soit } f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

4. Donner une valeur approchée par défaut à $0,1$ près de α .

Correction

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}$$

1. Soit D_f l'ensemble de définition de f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

2. les fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{2}x$ et $v : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ sont continues sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ comme fonctions usuelles continues sur leur domaine de définition ; donc f est continue sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ comme somme des deux fonctions u et v .

3. f est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; de plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$

D'où d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

4. Utilisant la dichotomie pour déterminer une valeur approchée par défaut à 0,1 près de α .

Soit $x_0 = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$; et $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-3 + 4\sqrt{2}}{8} > 0$

Donc on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$; d'où $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] = [0,5; 0,75]$ l'amplitude de cet intervalle est 0,25 ; alors il faut utiliser une deuxième fois la dichotomie pour affiner l'encadrement de α

Soit $x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$; et $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{16} > 0$

Donc on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{5}{8}\right) < 0$; d'où $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right] = [0,5; 0,625]$ l'amplitude de cet intervalle est $0,125 \approx 0,1$; par suite $\frac{1}{2}$ est une valeur approchée par défaut à 0,1 près de α .

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -3 ; puis interpréter géométriquement le résultat.
3. Etudier la fonction f ; puis tracer la courbe C .
4. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2; 3]$, $J = [0; 5]$ et $K =]-1; +\infty[$.
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1; +\infty[$.

Correction

$$f(x) = \sqrt{x+3} - 2$$

1. Soit D_f l'ensemble de définition de f .

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x+3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\} \\ &= [-3; +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ on a : } f(-3) &= -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2 + 2}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}} = +\infty \end{aligned}$$

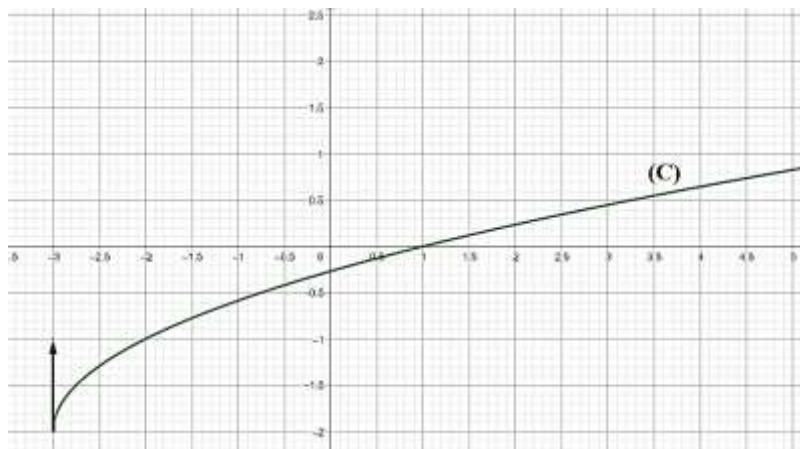
D'où f n'est pas dérivable à droite en -3 ; et sa courbe C admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3. la fonction f est dérivable sur $] -3; +\infty[$; comme somme d'une fonction racine carrée et une fonction constante ; et pour tout $x \in] -3; +\infty[$ on a : $f'(x) = (\sqrt{x+3} - 2)'$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Donc $(\forall x \in] -3; +\infty[) ; f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $] -3; +\infty[$

Construction de la courbe C.



4. f est continue croissante sur chacun des intervalles $I = [2; 3]$, $J = [0; 5]$ et $K =] -1; +\infty[$.

$$D'où : \blacktriangleright f([2; 3]) = [f(2); f(3)] = [\sqrt{5} - 2; \sqrt{6} - 2]$$

$$\blacktriangleright f([0;5]) = [f(0); f(5)] = [\sqrt{3}-2; 2\sqrt{2}-2]$$

$$\blacktriangleright f(]-1;+\infty[) =]f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]\sqrt{2}-2; +\infty[$$

5. Pour déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1; +\infty[$; on résout l'inéquation $f(x) \geq -1$

$$\text{On a : } f(x) \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 \geq -1 \text{ et } x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq 1 \text{ et } x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow x+3 \geq 1 \text{ et } x \geq -3$$

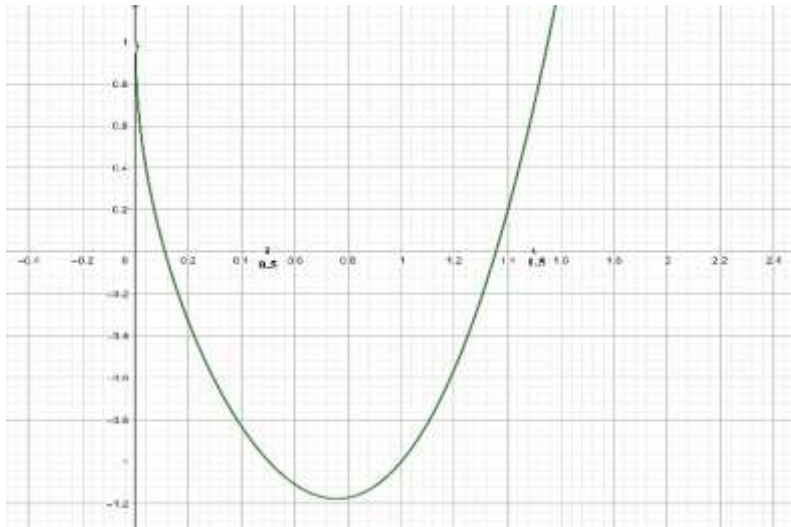
$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ et } x \geq -3$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Donc l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1; +\infty[$ est l'intervalle $[-2; +\infty[$

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$



1. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0,5 près de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner une valeur approchée à 0,1 près par défaut de chacune de ces solutions.

Correction

1. Graphiquement la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation

$f(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 \in]0; 0,5[$ et $x_2 \in]1; 1,5[$.

2. $x_1 \in]0; 0,5[$ et $x_2 \in]1; 1,5[$; donc graphiquement une valeur approchée à 0,5 près de x_1 est 0,5 et une valeur approchée à 0,5 près de x_2 est 1

3. ► $f(0,1) \approx 0,05 > 0$ et $f(0,2) \approx -0,33 < 0$; donc $x_1 \in]0,1; 0,2[$

une valeur approchée à 0,1 près par défaut de x_1 est 0,1

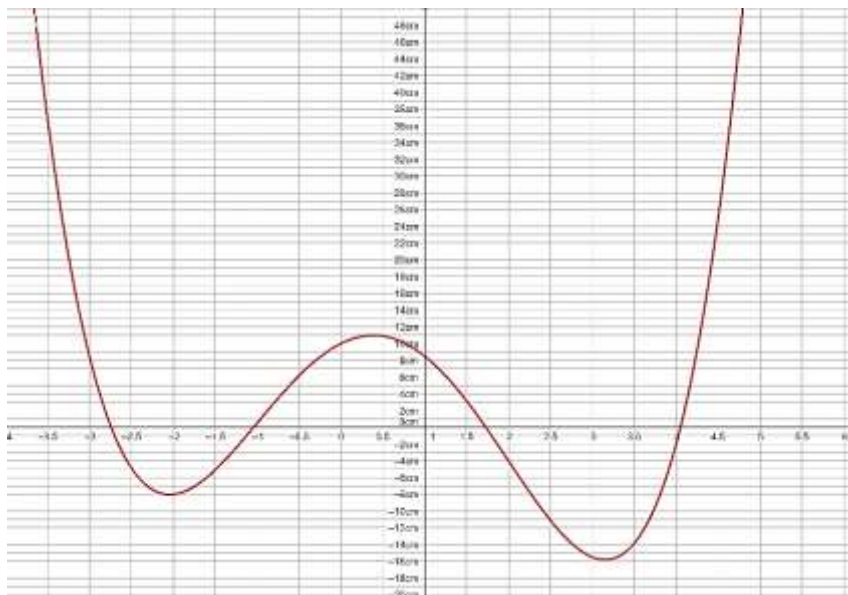
► $f(1,3) \approx -0,22 < 0$ et $f(1,4) \approx 0,19 > 0$; donc $x_2 \in]1,3; 1,4[$

une valeur approchée à 0,1 près par défaut de x_2 est 1,3

Exercice 8

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$$



1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f(-3)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3; -2]$.

3. Calculer $f(-1,5)$ et $f(-1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,5; -1]$.

4. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.
5. Calculer $f(4)$ et $f(4,5)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4;4,5]$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Correction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$$

1. f est une fonction polynôme de 4^{ième} degré donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a : $f(-3) \simeq 8,5$ et $f(-2) \simeq -8$.

Comme f est continue sur $[-3;-2]$ et $f(-3) \times f(-2) < 0$; alors d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3;-2]$.

3. On a : $f(-1,5) \simeq -5,09$ et $f(-1) \simeq 0,5$.

Comme f est continue sur $[-1,5;-1]$ et $f(-1,5) \times f(-1) < 0$; alors d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,5;-1]$.

4. On a : $f(1) \simeq 8,5$ et $f(2) \simeq -4$.

Comme f est continue sur $[1;2]$ et $f(1) \times f(2) < 0$; alors d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

5. On a : $f(4) \simeq -2$ et $f(4,5) \simeq 25$.

Comme f est continue sur $[4;4,5]$ et $f(4) \times f(4,5) < 0$; alors d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4;4,5]$.

6. On remarque graphiquement que f admet un signe constant sur tous les intervalles sauf sur les intervalles vus dans les questions précédentes ; donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans ces intervalles ; par suite elle admet exactement quatre solutions dans $\mathbb{R}$.