## Exercice 1

*1) Étudier la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ .

*2) Soit la fonction g définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x) = \dfrac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1}$

## Corrigé

*On commence par écrire que* $f(x) = e^{-(\ln x)^2}$ *. Ainsi, on en déduit que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *. Sa dérivée est*

$$f'(x) = -\frac{2}{x}(\ln x) \times e^{-(\ln x)^2} .$$

$f'(x)$ *est donc positive sur* $]0;1[$ *et négative sur* $]1;+\infty[$ *. De plus,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ .

*Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :*

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

*La courbe obtenue est :*

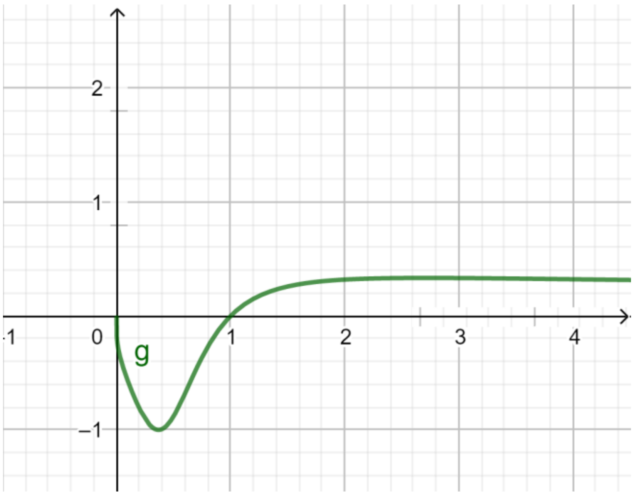

*2-* $g(x) = \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1} = h(\ln x)$ *où* $h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$ *donc comme h est définie sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction* $x \mapsto \ln x$ *est définie sur* $]0;+\infty[$ *; alors g est définie sur .* $]0;+\infty[$ .

*Par suite on a :* $g'(x) = \left(f(\ln x)\right)' = \dfrac{1}{x} h'(\ln x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-\ln^2 x + 1}{\ln^2 x + \ln x + 1}\right)$

*Donc le signe de* $g'(x)$ *est celui de* $\left(-\ln^2 x + 1\right) = (1 - \ln x)(1 + \ln x)$

*Tableau de signe de* $g'(x)$

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{e}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1-\ln x)$ | | | + | | 0 | - | |
| $(1+\ln x)$ | | - | 0 | | + | | |
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |




***Exercice***

*On considère la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)$. *La courbe* $(C)$ *représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.*

***Partie A***

*- Étude de la fonction f*

*1. Montrer que, pour tout réel x,* $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$.

*On admet que, pour tout réel x,* $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$.

*2. Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et montrer que la droite* $(D)$ *d'équation* $y=x$ *est asymptote à* $(C)$ .

*Étudier la position relative de* $(C)$ *et de* $(D)$.

*3. Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et montrer que la droite* $(D')$ *d'équation* $y=-x+\ln 2$ *est asymptote à* $(C)$.

*4. Étudier les variations de la fonction f.*

*Montrer que le minimum de la fonction f est égal à* $\frac{3}{2}\ln 2$ .

*5. Tracer les droites* $(D)$ *et* $(D')$ *sur la figure.*

***Partie B***

*- Encadrement d'une intégrale*

*On pose :* $I=\int_{2}^{3}\left[f(x)-x\right]dx$ .

*1. Donner une interprétation géométrique de I.*

*2. Montrer que, pour tout* $X\in[0;+\infty[$ , $\ln(1+X)\leq X$ .

*En déduire que :* $0\leq I\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$ *et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.*

***Correction***

***Partie A***

*1.* $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)$

$$=\ln\left(e^{x}\left(1+2e^{-2x}\right)\right)$$

$$=\ln e^{x}+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$$

$$=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$$

***Remarque*** *:*

*si on met en facteur* $e^{-x}$ *à la place de* $e^{x}$ *, on obtient :* $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$.

2. ■ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

*la droite* $(D)$ *d'équation* $y=x$ *est asymptote à* $(C)$ *au voisinage de* $+\infty$.

3. ■ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)=\ln 2$

*la droite* $(D')$ *d'équation* $y=-x+\ln 2$ *est asymptote à* $(C)$ *au voisinage de* $-\infty$.

*On a pour tout x réel :* $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$ *; et* $1+2e^{-2x}>1\Leftrightarrow\ln\left(1+2e^{-2x}\right)>0$

*Donc la courbe* $(C)$ *est toujours au-dessus de la droite* $(D)$.

4. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *;* $f'(x)=\left(x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)\right)'$

$$=1+\frac{2\times(-2)\times e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}$$

$$=1-\frac{4e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}$$

$$=\frac{1+2e^{-2x}-4e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}$$

$$=\frac{1-2e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}$$

■ $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-2e^{-2x}=0$

$$\Leftrightarrow e^{-2x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2x=\ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{2}$$

■ $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow x\le\frac{\ln 2}{2}$ ■ $f'(x)\le 0\Leftrightarrow x\ge\frac{\ln 2}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{\ln 2}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

***Partie B***

*- Encadrement d'une intégrale*

1. *A représente l'aire comprise entre* $(C)$ *, la droite* $(y=x)$ *, les droites* $x=2$ *et* $x=3$ .

2. $\ln(1+X)\le X\Rightarrow\ln\left(1+2e^{-2x}\right)\le 2e^{-2x}$ *; car* $2e^{-2x}>0$. *Par ailleurs on a :* $f(x)\ge x\Rightarrow A\ge 0$ .

$A=\int_{2}^{3}\left(f\left(x\right)-x\right)dx$

$=\int_{2}^{3}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$

$=\left[\frac{2}{-2}e^{-2x}\right]_{2}^{3}$

$=-e^{-6}+e^{-4}\simeq 0;015$

; $0,01$ *est une estimation de I d'amplitude* $0,02$.

***1. 12. <u>Sommes partielles série harmonique</u>,***

*Soit* $\left(u_n\right)$ *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$ .

***PARTIE A***

*1. Montrer que pour tout n de* $\mathbb{N}^*$ , $u_{n+1}-u_n=\frac{-3n-2}{n\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}$.

*2. En déduire le sens de variation de la suite* $\left(u_n\right)$.

*3. Établir alors que* $\left(u_n\right)$ *est une suite convergente.*

*L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite* $\left(u_n\right)$.

*PARTIE B*

*Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

*1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :* $\frac{1}{n+1}\leq\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{n}$ .

*b. Vérifier que :* $\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}-f\left(n\right)$.

*c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,* $0\leq f\left(n\right)\leq\frac{1}{n\left(n+1\right)}$ .

***<u>Exercice</u>***

***<u>Partie A</u>***

*Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur* $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $f\left(x\right)=x+\frac{2\ln x}{x}$ .

$\left(C\right)$ *est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *(unité graphique : 1 cm ).*

*1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur* $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $g\left(x\right)=x^2+2+2\ln x$ .

*a. Étudier le sens de variation de g et calculer* $g\left(1\right)$.

*b. En déduire le signe de g(x) pour tout x de* $\left]0;+\infty\right[$.

*2. a. Calculer les limites de f en 0 et en* $+\infty$ .

*b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.*

*c. Montrer que la droite* $\Delta$ *d'équation* $y=x$ *est asymptote à* $\left(C\right)$ *et étudier la position relative de* $\left(C\right)$ *et* $\Delta$ .

*d. Déterminer les coordonnées du point A de* $\left(C\right)$ *sachant que* $\left(C\right)$ *admet en A une tangente T parallèle à* $\Delta$ .

*e. Tracer* $\left(C\right)$, $\Delta$ *et T dans le repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .

3. Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine du plan limité par $\Delta$, la courbe $(C)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ .

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $x_0$ . Prouver que $\frac{1}{2} \le x_0 \le 1$

**Partie B**

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de $x_0$ .

On désigne par h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

1. Montrer que $x_0$ est l'unique solution de l'équation $h(x)=x$ .

2. On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Montrer que, pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.

3. a. Calculer la dérivée $h'$ de h et la dérivée seconde $h''$ de h.
   b. Étudier les variations de $h'$ sur I.
   c. En déduire que, pour tout x de I, on a : $|h'(x)| \le e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = h(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$.

b En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$|u_{n+1} - x_0| \le e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|u_n - x_0| \le \frac{1}{2} e^{\frac{-n}{2}}$

5. a. Déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que, pour tout entier $n \ge n_0$ , on ait : $\frac{1}{2} e^{\frac{-n}{2}} < 10^{-2}$.

b. Montrer que : $|u_{n_0} - x_0| \le 10^{-2}$ .

Que représente $u_{n_0}$ relativement à $x_0$ ? Calculer $u_{n_0}$ à $10^{-2}$ près par défaut.

**Correction**

**Partie A**

1. a. $g(x) = x^2+2+2\ln x$

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2}{x}(x-1)(x+1)$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ | ↘ | $3$ | ↗ | |

b. $3$ est un minimum de la fonction g sur $]0;+\infty[$ donc la fonction g est positive quel que soit x.

2. a. ■ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\dfrac{2\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+} x+2\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ *( car* $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ *)*

■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{2\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ *( car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ *)*

b. $f'(x)=\left(x+\dfrac{2\ln x}{x}\right)'=1+\dfrac{2\times\frac{1}{x}\times x-2\ln x\times1}{x^2}=\dfrac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ *; donc* $f'(x)$ *est du signe de g(x),*

*c'est à dire positif* $f'(x)\geq0$ *pour tout* $x\in\left]0;+\infty\right[$ *; f est donc strictement croissante sur* $x\in\left]0;+\infty\right[$.

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)=0$, *donc la droite d'équation* $y=x$ *est asymptote à la courbe.*

*Pour* $x<1$ *la courbe est au-dessous de* $\Delta$ *, et pour* $x>1$ *, la courbe est au-dessus de* $\Delta$

*Car* $\left(f(x)-x\right)$ *du signe de* $\dfrac{\ln x}{x}$.

d. $(C)$ *admet en A une tangente de coefficient directeur* $1$ *ssi '* $f'(x_A)=1$

■ $f'(x_A)=1\Leftrightarrow\dfrac{g(x_A)}{{x_A}^2}$

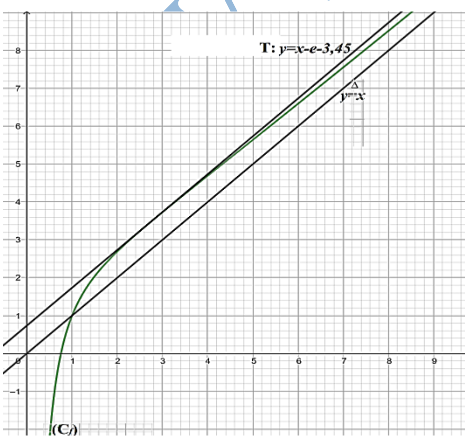
$\Leftrightarrow {x_A}^2+2-2\ln x_A={x_A}^2$

$\Leftrightarrow 2-2\ln x_A=0$

$\Leftrightarrow \ln x_A=1$

$\Leftrightarrow x_A=e$

■ $f(x_A)=f(e)=e+\dfrac{2\ln e}{e}=e+\dfrac{2}{e}\simeq3{,}45$




3. *Il faut calculer* $\int_1^e\left(f(x)-x\right)dx$

■ $\int_1^e \left( f\left(x\right) - x \right) dx = 2\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

$= 2\int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x dx = 2\int_1^e \left(\ln x\right)' \times \ln x dx$

$= 2\left[ \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2 \right]_1^e = 1$

*4. La fonction f est continue, strictement croissante, sur* $\left]0;+\infty\right[$ *, c'est donc une bijection de* $\left]0;+\infty\right[$ *sur* $\mathbb{R}$ . *Il existe bien un réel* $x_0$ *appartenant à* $\left]0;+\infty\right[$ *telle que :* $f\left(x_0\right) = 0$ .

*De plus on a :*

■ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 4\ln 2 < 0$

■ $f\left(1\right) = 1 + \frac{2\ln 1}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$

*Par suite d'après le théorème des valeurs intermédiaires* $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

***<u>Exercice</u>***

*On considère la fonction f définie sur l'intervalle* $\left[0;+\infty\right[$ *par :* $\begin{cases} f\left(x\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & si\ x\ >\ 0 \\ f\left(0\right) = 0 \end{cases}$ .

*On note* $\left(C\right)$ *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *(unité graphique: 5cm ).*

*Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f .*

***Partie A :***

*<u>Etude d'une fonction auxiliaire</u>*

*On considère la fonction g définie sur l'intervalle* $\left]0;+\infty\right[$ *par :* $g\left(x\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$ .

*1. Calculer la dérivée* $g'$ *de g.*

*Montrer que pour tout x de* $\left]0;+\infty\right[$ , $g'\left(x\right) = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$ .

*2. Etudier le signe de* $g'\left(x\right)$ *selon les valeurs de x.*

*Puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} g\left(x\right)$ .

*3. Dresser le tableau des variations de g.*

*4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel* $\alpha > 0$ *tel que* $g\left(\alpha\right) = 0$ .

*Vérifier que :* $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ .

*Déduire des questions précédentes le signe de* $g\left(x\right)$ *sur l'intervalle* $\left]0;+\infty\right[$ .

*On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.*

***Partie B :***

*<u>Etude de la fonction f</u>*

1. a. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ *(on pourra poser* $X=\frac{1}{x^2}$ *).*

b. *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

*Montrer que pour tout x de* $]0;+\infty[$ *, on a :* $f'(x)=g(x)$ .

*Dresser le tableau de variations de f sur* $]0;+\infty[$ .

2. <u>*Etude de f en 0*</u>

a. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$ .

*Que peut-on en conclure ?*

b. *Etudier la dérivabilité de f en 0.*

c. *Préciser la tangente à la courbe de f au point O.*

3. *Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.*

4. *Donner l'allure de* $(C)$.

***<u>Correction</u>***

1. a. *g est dérivable comme somme de fonctions dérivables.*

*En effet la fonction* $x\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ *est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que*

*la fonction* $x\mapsto -\frac{2}{x^2+1}$. *Et pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *; on a :*

$$g'(x)=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)'-\left(\frac{2}{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{2x}{x^4}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=x^2\times\frac{-\frac{2x}{x^4}}{\left(x^2+1\right)}+2\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-2\left(x^2+1\right)+4x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2}{x\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)}$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$ ; $g'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)}$

b. *Le signe de* $g'(x)$ *est celui de* $\left(x^2-1\right)=(x-1)(x+1)$. *Comme g' est définie sur* $\left]0;+\infty\right[$ *, alors le signe de*

$g'(x)$ *est celui de* $(x-1)$ *on a :*

- *si* $0<x\le 1$ , $g'(x)$ *est négatif ;*
- *si* $x\ge 1$ , $g'(x)$ *est positif.*

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x^2+1}\right)=0$ *( car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ *)*

3. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x^2+1}\right)$

*On pose :* $X=\dfrac{1}{x^2}$ *on a :* $x\to0^+ \Rightarrow X\to+\infty$ *; donc :*

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+X)-\frac{2}{\dfrac{1}{X}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+X)-\frac{2X}{1+X}\right)=+\infty$$

*( car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2X}{X+1}=2$ *et )* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+X)=+\infty$

4. a. <u>*Tableau de variation de g*</u> .

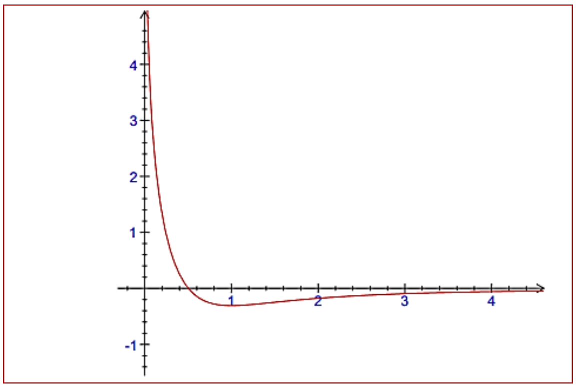
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-0,3$ | $\nearrow$ | $0$ |

- $g(1)=\ln\left(1+\dfrac{1}{1^2}\right)-\dfrac{2}{1^2+1}=\ln(2)-1\simeq-0,3$

4. b. *La fonction g est continue et dérivable sur* $\left]0;1\right]$, *de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle. On a* $g\left(\left]0;1\right]\right)=\left[-0,3;+\infty\right[$ *, et comme* $0\in\left[-0,3;+\infty\right[$ *donc il existe une valeur* $\alpha\in\left]0;1\right[$ *telle que* $g(\alpha)=0$ . *On a* $g(0,5)\simeq0,009438$ *et* $g(0,6)\simeq-0,141452$ *donc comme g est décroissante, alors d'après le TVI on a :* $0,5<\alpha<0,6$ .

5. ■ *Pour* $0<x<\alpha$ , $g(x)$ *est positif ;*

■ *Pour* $x>\alpha$ *alors g(x) est négatif.*




1. a. . $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)$

*On pose :* $X = \frac{1}{x^2}$ *on a :* $x \to +\infty \Rightarrow X \to 0^+$ *; donc :*

$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lim\limits_{X\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+X)}{X}\right) = 1$

*Donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1$

. b. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

*Donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. $f'(x) = \left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)'$

$$= x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)' + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)'}{1+\frac{1}{x^2}} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\frac{\frac{-2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^3\frac{\frac{-2x}{x^4}}{x^2+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

*D'où :* $\forall x \in \left]0;+\infty\right[ \;;\; f'(x) = g(x)$

<u>*Tableau de variation de f*</u>

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

| $g(x)$ | $0 \nearrow f(\alpha) \searrow 0$ |
|---|---|

■ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln\left(x^2+1\right)-x\ln\left(x^2\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln\left(x^2+1\right)-2x\ln\left(x\right)\right)=0$$

*( Car* $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(x^2+1\right)\right)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}2x\ln(x)=0$ *)*

*3. a.* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ *(Voir la question précédente)*

*b. f dérivable à droite en 0 si et seulement si* $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *est finie.*

■ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=+\infty$

*La fonction n'est donc pas dérivable à droite en 0 ; et sa courbe admet une demi-tangente verticale*

*dirigée vers le haut à droit du point d'abscisse 0.*

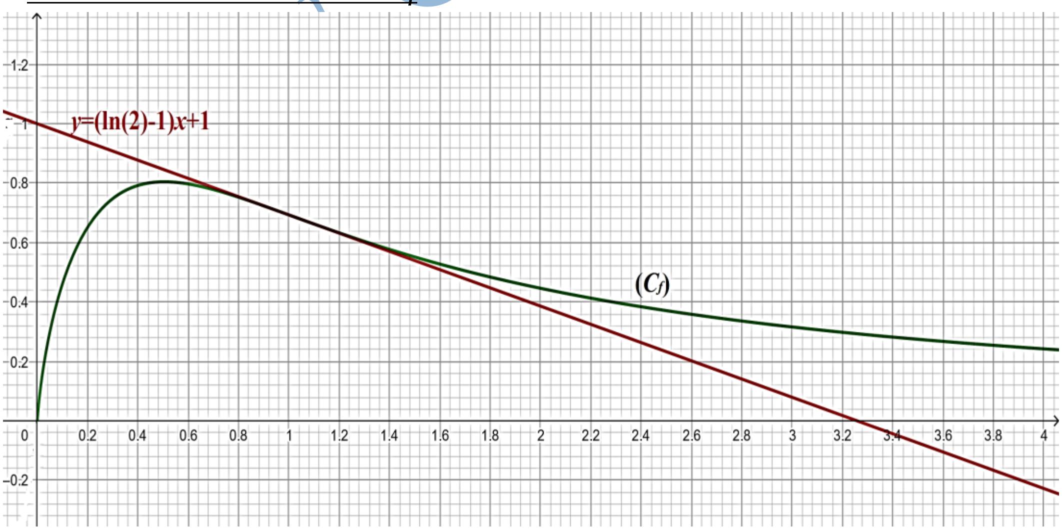
*c. La tangente en O à f est verticale. Son équation est* $x=0$.

*4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :* $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

■ $f'(1)=g(1)=\ln(2)-1$ ■ $f(1)=1\times\ln\left(1+\frac{1}{1^2}\right)=\ln 2$

*D'où :* $y=(\ln(2)-1)(x-1)+\ln(2)=(\ln(2)-1)x+1$

*Construction de la courbe de f*




***Remarque*** *:*

*On a vu dans* ***la partie A*** *que* $g'(1)=0$ *, or* $g'(1)=f''(1)$*, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 ;*

*la courbe admet un point d'inflexion pour* $x=1$.