Exercice n°01 :

Partie 1 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+(x-1)e^{x}$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2) Dresser le tableau de variations de g.
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie 2:

On considère la fonction f définie sur R par : $\begin{cases} f(x)=x-xe^{\frac{1}{x}} & si\ x<0 \\ f(x)=\left(x-2\sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}} & si\ x\geq 0 \end{cases}$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0 et interpréter graphiquement les résultats.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
4) Etudier les branches infinies de (C_f).
5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
6) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
7) Dresser le tableau de variations de f.
8) Donner l'équation de la tangente (T_1) au point d'abscisse 2.
9) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice n°02 :

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-e^{-x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation : $f(x)=1-x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{1}{e}<\alpha<1$.
3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ (\exists c\in]0;x[)\ /\ \frac{x-f(x)}{x^2}=\frac{1-e^{-c}}{2c}$
   b)- En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-f(x)}{x^2}$

II- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

1) a). Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.
   c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n=\frac{u_n-u_{n+1}}{(u_n)^2}$.

2) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 \in \left]\frac{1}{e};1\right[\\ w_{n+1} = 1 - f(w_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{e} < w_n < 1$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|w_{n+1} - \alpha| \le e^{\frac{-1}{e}} |w_n - \alpha|$.

Puis en déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

III- On considère l'équation : (E): $f(x) = 1 - x^n$,Où x est l'inconnu et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que (E) admet une unique solution α_n dans l'intervalle $]0;1[$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{-1}{n} < \ln \alpha_n < 0$, puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

3) Calculer en justifiant la réponse chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\alpha_n)$

Exercice n°03

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous:

a) $y' + 3y = 0$ b) $y' - \sqrt{2}y = 0$

c) $-5y' + y = 0$ d) $5y' + 4y = 0$

e) $y' = -\frac{1}{2}y$

2) Résoudre les équations différentielles ci- dessous avec les conditions initiales imposées :

a) $-f' + 2f = 0$ et $f(3) = -2$ b) $y' - \frac{1}{2}y = 0$ et $y(-1) = e$

c) $-3y' - y = 0$ et $y(\ln 8) = 1$ d) $y' - \pi y = 0$ et $\ln(y(2)) = \pi$

3) Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de l'équation du même type que le second membre:

a) $y' - 3y = 2$ b) $2y' + y - 3 = 0$ et $y(0) = 3$

c) $y' - 5y = e^{5x}$ d) $y' - y = \sin x$

4) Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $2g'(x) + g(x) = 0$ et telle que (C_g) admette en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

Déterminer la fonction $g(x)$.

Exercice n°04

1) Pour chacun des cas ci-dessous donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

a) $f'' + 4f = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

b) $8f'' + 2f = 0$ avec $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = \sqrt{3}$

c) $f'' - \frac{4}{9}f = 0$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

2) On considère les équations différentielles suivantes : (E_1) : $y'' + 4y = 0$; (E_2) : $y'' + y = 0$

a) Déterminer la solution de l'équation (E_1) dont la courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ passe par le point $A(0;2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

b) Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

3) On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=2y'$.

a) En posant $z=y'$ résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0)=2$ et $f'(0)=1$

4) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9f''+f=0$ sachant que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=0$ et $\int_0^{\pi} f(x)dx=3$.

Exercice n°04

On considère l'équation différentielle suivante $(E):\ f'(x)-2f(x)=xe^x$

1) Démontrer que la fonction u définie par : $u(x)=-(x+1)e^x$ est solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle $(E'):\ f'(x)-2f(x)=0$.

3) Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions $f_k=ke^{2x}-(x+1)e^x$ avec $k\in\mathbb{R}$.

5) En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice n°05

On considère l'équation différentielle suivant $(E):\ y-y'=\dfrac{e^{-x}}{x^2}$

1) Démontrer que la fonction u définie par : $u(x)=\dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si la fonction h définie par $h(x)=v(x)-\dfrac{e^x}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E'):\ y-y'=0$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice n°06

Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$

1) Résoudre cette équation différentielle.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle, vérifiant les conditions ci-dessous :

La courbe (C_g) passe par le point $N\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La tangente à (C_g) en N est parallèle à l'axe des abscisses.

3) Vérifier que pour tout réel x, $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice n°07

1) Résoudre dans R l'équation $(E):y''-4y=0$

2) Soit l'équation différentielle $(E'): y'' - 4y = (-x+1)e^x$

a) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^x$ est une solution de (E').

b) Soit h une solution de (E), démontrer que $f = h + g$ est solution de (E').

3) Parmi les solutions définies au 2)b) déterminer celle dont sa courbe représentative passe par $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y + x = 0$.

Exercice n°08

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): y'' + y = 0$

2) Soit l'équation différentielle (E'): y'' + y = et + e-* $(E'): y'' + y = e^x + e^{-x}$

3) On note f une solution quelconque de (E') et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = f(x) - m\left(e^x + e^{-x}\right)$, $m \in \mathbb{R}$

a) Exprimer $g''(x)$ en fonction de f'' et m.

b) Déterminer m pour que g soit solution de (E)

c) En déduire toutes les fonctions f définies ci-dessus.

d) Déterminer la fonction h solution de (E') et vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$

Exercice n°09

A) On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x.g(x)$.

a) Calculer $g(0)$

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et $g(x)$.

c) Montrer que f est solution de (E), si et seulement si, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d) En déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

B) Etude de la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$

1) On pose : $h(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) - \frac{1}{e^{2x}+1}$

a) Etudier la limite de h en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de h.

c) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.

3- a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que : $f(x)=e^{2x}\left[-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$

c) En déduire la limite de f en $-\infty$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité: $5cm$)

C) 1. En remarquant que : $\dfrac{1}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ déterminer une primitive de la fonction 1zx

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en cm) du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.