EXAMEN BLANC Sc-Maths B : 09 / 06 / 2020

EXERCICE 01: (03.5 pts)

On rappel que $(M_2(\mathbb{R})\ ;\ +\ ;\ \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R})\ ;\ +\ ;\ \times)$ est un anneau unitaire .

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(x;y) = \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \ /\ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.5 1. Montrer que $(E\ ;\ +\ ;\ \cdot)$ est un espace vectoriel réel .

0.5 2. Vérifier que la famille $(I;J)$ est une base de E puis donner sa dimension .

0.5 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\quad J^{2n} = (-2)^n I$,puis donner les coordonnées de $I + J + J^2 + \cdots + J^{2020}$ dans la base $(I;J)$.

0.5 4. Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R})\ ;\ \times)$.

5. Soit φ l'application définie de l'ensemble E vers l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$\forall\, M(x;y) \in E \quad \varphi\big(M(x;y)\big) = x + iy\sqrt{2}$$

0.5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E\ ;\ \times)$ vers $(\mathbb{C}\ ;\ \times)$.

0.5 b) Montrer que $(E\ ;\ +\ ;\ \times)$ est un corps commutatif .

0.5 c) Soit $m \in \mathbb{N}$; On pose $A = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$, Montrer que $A^m = I \iff m \equiv 0[8]$

EXERCICE 02: (03.5 pts)

I. Soit m un nombre complexe **non nul** .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$.

0.5 1. Déterminer z_1 et z_2 les deux solution de (E) .

0.25 2. Déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit une solution de l'équation (E) .

0.5 3. Déterminer l'ensemble des points M(m) qui vérifie $|z_1| = |z_2|$.

0.5 4. On pose $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigométrique.

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct .

On considère les points M , M' et M'' d'affixes réspectivement m ; $m' = -1 + im$ et $m'' = -1 - im$.

0.5 1. Déterminer l'ensemble des points M(m) tel que M , M' et M'' soient alignées .

2. Supposons que $|m|^2 + \mathrm{Re}(m) \neq 0$

Soit R la transformation complexe qui a chaque point $M_1(z_1)$ est associée le point $M_2(z_2)$ tel que $z_2 = iz_1 - 1$.

0.25 a) Montrer que R est une rotation de centre Ω et d'angle α qu'ils faut determiner.

0.5 b) Montrer que $\frac{m''-m}{m''-m'} \in i\mathbb{R} \iff |m|^2 = \mathrm{Im}(m)$.

0.5 c) Déterminer l'ensemble des points M(m) pour lesquels Ω , M , M' et M'' sont cocyclyques .

EXERCICE 03: (03,5 pts)

0.5 **I.** 1. En utilisons l'algorithme d'EUCLIDE , déterminer une solution particulière de l'équation diophantienne (E) : $27x - 31y = 1$.

0.5 2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

II. On considère l'ensemble $A = \{0; 1; 2; \dots ; 30\}$

0.5 1. Déterminer le nombre a de l'ensemble A tel que $27a \equiv 1[31]$.

2. Soit f l'application de A vers A qui à chaque élèment n de A en lui associé le reste de la division euclidiènne de $27n+4$ par 31 .

0.75 a. Soient n et m deux entiers de l'ensemble A .
Montrer que $f(n)=f(m) \Rightarrow n=m$.

0.75 b. Soit m un élèment de A , déterminer n de A tel que $m=f(n)$.

0.5 c. Montrer que f est bijective puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

EXERCICE 04: (02 pts)

Soit n un entier naturel , on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{et} \qquad T_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)$

0.5 1. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes .

0.5 2. Montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$: $F'_n(x)=1+(-1)^n\tan^{2n+2}(x)$.

0.5 3. Montrer que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $F_{2n+1}(x)<x<F_{2n}(x)$.

0.5 4. Déterminer la limite commune de (S_n) et (T_n) .

PROBLEME: (11 pts)

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\frac{x}{(\ln x)^n} & ;\ x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée

Partie I :

0.5 1. Etudier la continuitée et la dérivabilitée à droite du point 0 .

0.25 2. a) Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C}_n)$ au voisinge de $+\infty$.

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f_n(x)$

0.5 3. a) montrer que $\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'_n(x)=\frac{\ln x-n}{(\ln x)^{n+1}}$

0.5 b) Donner le tableau de variation de f_n . (selon la paritée de n)

0.25 4. Etudier la postion relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

0.75 5. Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère .

Partie II : **Supposons que $n\geq 3$** .

0.5 1. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ admet dans $]1;+\infty[$ deux solutions α_n et β_n avec $\alpha_n<\beta_n$

0.5 2. Calculer la limite de $(\beta_n)_{n\geq3}$ puis montrer que $\lim\frac{\beta_n}{e^n}=+\infty$

0.25 3. a) Montrer que $\forall n\geq 3$: $\alpha_n>e$

0.5 b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq3}$ est croissante et déduire qu'elle est convergente .

0.5 c) On pose $x_n=\ln(\alpha_n)$ pour tout $n\geq 3$

Montrer que $\forall n\geq 3$ $\frac{1}{n}\leq \ln(x_n)\leq\frac{3}{n}$, puis déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq3}$.

EXAMEN BLANC Sc-Maths B : 09 / 06 / 2020

Partie III : Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} f_1(t)dt & ; \ x \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\} \\ F(0) = 0 \ ; \ F(1) = \ln 2 \end{cases}$$

0.5 1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{1\} \quad \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \ln 2$

0.5 b) Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[\ ; \ x^2\ln 2 \leq F(x) \leq x^4\ln 2$

et $\forall x \in]0;1[\ ; \ x^4\ln 2 \leq F(x) \leq x^2\ln 2$

0.5 2. a) Etudier la continuitée et la dérivabilitée de la fonction F à droite de 0 .

0.5 b) Montrer que la fonction F est continue en 1 .

0.5 3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

4. On pose $\forall t \in]1;+\infty[; g(t) = \frac{t^2-1}{t\ln(t)}$

0.25 5. a)Vérifier que $\forall x \in]1;+\infty[\ ; F(x) - F(1) = \int_x^{x^2} g(t)dt$

0.5 b) Sachant que la fonction g est croissante sur $]1;+\infty[$, montrer que :

$$\forall x \in]1;+\infty[\ ; \ xg(x) \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq xg(x^2)$$

0.25 c) Déduire que F est dérivable à droite en 1 , puis déterminer $F'_d(1)$.

0. 5 6. a) En utilisant le théorème des accroissements finis deux fois , montrer que

$$\forall x \in]0;1[\ ; \ x^2(x+1) \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq 2$$

0.25 b) Est- ce que F est dérivable en 1.

0.5 7. a) Montrer que F est dérivable sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ et que $F'(x) = \frac{x^3-x}{\ln x}$.

0.75 b) Donner le tableau de variation de F , puis tracer la courbe de la fonction F .