Exercice 01 : (06 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $f_n(x) = -nx + \ln x$

1)- a)- *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

b)- *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}),\ f_n'(x) = \dfrac{-nx+1}{x}$

.Puis dresser le tableau de Variation de f_n.

2)- a)- *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), \ln x < 2x - 1$.

b)- *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *l'équation* $f_n(x) = -2n$ *admet exactement*

Deux solutions u_n *et* v_n *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ *tels que :* $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$ *et* $v_n > 2$.

3)- *Déterminer la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Puis montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{e^2}$.

4)- a)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ f_{n+1}(v_n) < -2(n+1)$. *Puis déduire la monotonie*

De la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b)- *Justifier que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente puis déterminer sa limite.*

c)- *Calculer la limite suivante :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n(v_n - 2)}{\ln 2}$.

Exercice 02 : (05 points)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}\right)$.

1)- a)- *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}),\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}$.

b)- *Vérifier que :* $(\forall x \in [1, +\infty[), |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2)- *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+), \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(x+2)$.

3)- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$, *On pose :* $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x$.

Montrer que φ *est strictement décroissante sur* $[1,+\infty[$ *, puis en déduire que l'équation* $f(x)=\frac{1}{2}x$ *admet une unique solution* α *dans* $[1,+\infty[$ *et que* $1<\alpha<4$.

4)- *On considère la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $a_0=1$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N}), a_{n+1}=f(2a_n)$.

a)- *Montrer par récurrence que :* $(\forall n\in\mathbb{N}), 1\leq a_n\leq 2$.

b)- *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}), \left|a_{n+1}-\frac{1}{2}\alpha\right|\leq\frac{2}{\sqrt{5}}\left|a_n-\frac{1}{2}\alpha\right|$ *. Puis en déduire que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente en précisant sa limite .*

<u>Exercice 03</u> : (09 points)

I- Soit g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $g(x)=\ln^3 x-\ln^2 x+\ln x+1$.

1)- *Calculer* $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2)- a)- *Montrer que* g *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers* $\mathbb{R}$.

b)- *En déduire que l'équation* $g(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que* $\frac{1}{e}<\alpha<1$.

c)- *Dresser le tableau de signe de* g *sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *en justifiant votre réponse.*

II- On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}^{+}$ *par :*

$$f(0)=0 \text{ et } (\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f(x)=\frac{x.\ln x}{1+\ln^2 x}.$$

1)- a)- *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^{+}$.

b)- *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ *, puis en déduire la nature de la branche infini de la courbe* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

2)- a)- *Montrer que* f *est dérivable à droite en 0 en précisant* $f_d'(0)$.

b)- *Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f'(x)=\frac{g(x)}{(1+\ln^2 x)^2}$ *. Puis dresser le tableau de Variation de* f *en justifiant votre réponse .*

3)- *Construire la courbe* (C_f) *(On donne* $\alpha\simeq 0,57$ *et* $f(\alpha)\simeq -0,25$ *) .*