Exercice 9 « Fonction Exponentielle »

Exercice 1

Partie I

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = xe^x - 2$

1) Dresser le tableau des variations de g

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans IR une unique solution α et que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$.

b) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie II

On Considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) et la droite Δ .

2) a) Montrer que pour tout réel x on a: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que : $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

3) Tracer la courbe (C_f) et l'asymptote Δ.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite Δ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

a) Montrer que pour tout $x \in [-1;0]$ on a : $\dfrac{1}{3}(x+1)e^x \le \dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2} \le \dfrac{e^x}{e^x+2}$

b) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{0} (x+1)e^x dx$

c) Montrer alors que : $\dfrac{1}{3e} \le A \le \ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$

Correction exercice1

Partie I

1) $g(x) = xe^x - 2$. g est dérivable sur IR et $(\forall x \in IR)$, $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

$g'(x)$ est du signe de $(1+x)$; car $(\forall x \in IR)$ $e^x > 0$

D'où Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-1} - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

a) ■ $\forall x \in]-\infty;-1]$; $g(x) \in [-e^{-1} - 2;-2[$ donc $g(x) \neq 0$

■ *Sur* $[-1;+\infty[$ *g est continue et strictement croissante et*

$$g([-1;+\infty[)=\left[g(-1);\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[=\left[-e^{-1}-2;+\infty\right[\text{ ; or } 0\in\left[-e^{-1}-2;+\infty\right[$$

Donc il existe et unique α *dans* $\left[-e^{-1}-2;+\infty\right[$ *tel que :* $g(\alpha)=0$ *et puisque :* $g(0,8)\simeq-0,22$ *et* $g(0,9)\simeq 0,21$ *alors* $g(0,8)\times g(0,9)<0$ *: d'où* $0,8<\alpha<0,9$.

b) ■ $(\forall x\in]-\infty;\alpha[)$; $g(x)<0$

■ $(\forall x\in]\alpha;+\infty[)$; $g(x)>0$. *et* $g(\alpha)=0$.

<u>Partie II</u>

1) a) $(\forall x\in IR)$ $f(x)=\dfrac{e^x\left(1-2xe^{-x}\right)}{e^x\left(1+2e^{-x}\right)}=\dfrac{1-2xe^{-x}}{1+2e^{-x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^{t}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}te^{t}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{1}=1$.

b)
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-2x}{e^x+2}+x$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\cancel{2x}+xe^x+\cancel{2x}}{e^x+2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+xe^x}{e^x+2}=0$$

(Car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ *)*

Donc la droite Δ *d'équation* $y=-x$ *est une asymptote à* (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

c) $(\forall x\in IR)$, $f(x)+x=\dfrac{e^x+xe^x}{e^x+2}=\dfrac{e^x}{e^x+2}(1+x)$ *donc* $f(x)-(-x)$ *est du même signe que* $(1+x)$.

(Car $(\forall x\in IR)$; $\dfrac{e^x}{e^x+2}>0$ *)*

Alors la courbe (C_f) *est au-dessous de* Δ *sur* $]-\infty;-1]$ *et au-dessus de* Δ *sur* $[-1;+\infty[$.

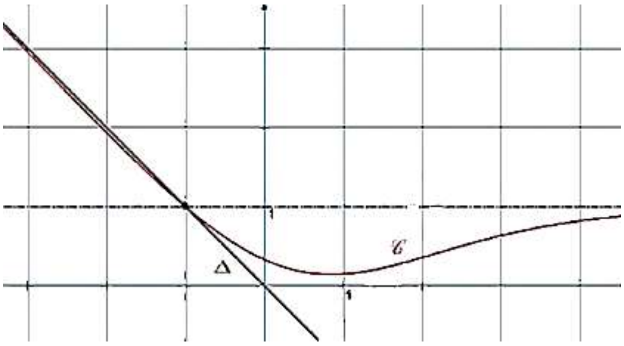
2) a) $(\forall x\in IR)$,
$$f'(x)=\frac{(e^x-2)(e^x+2)-e^x(e^x-2x)}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{\cancel{e^{2x}}-4-\cancel{e^{2x}}+2xe^x}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{2(xe^x-2)}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

D'où $f'(x)$ *est du signe de* $g(x)$ *sur IR ; donc d'après la question <u>Partie I</u>1)b) on dresse le tableau de variation de f comme suivant :*

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
	$+\infty$				1

$f(x)$	$\searrow f(\alpha)$

$On\ \ g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha e^{\alpha}-2=0 \Rightarrow e^{\alpha}=\frac{2}{\alpha}$; $d'où :\ f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-2\alpha}{e^{\alpha}+2}=\frac{\frac{2}{\alpha}-2\alpha}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{(1-\alpha^{2})}{1+\alpha}=1-\alpha$



4) a) $-1\le x\le 0 \Rightarrow 0<e^{x}\le 1 \Rightarrow 2<e^{x}+2\le 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\le \frac{1}{e^{x}+2}<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(x+1)e^{x}}{3}\le \frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}$$

$$Et\, x+1\le 1 \Rightarrow \frac{e^{x}}{e^{x}+2}(x+1)\le \frac{e^{x}}{e^{x}+2}\quad \left(Car : \frac{e^{x}}{e^{x}+2}>0\right).$$

$$Donc\ \ \forall x\in[-1;0]\quad \frac{(x+1)e^{x}}{3}\le \frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}\le \frac{e^{x}}{e^{x}+2}.$$

b) On pose $\begin{cases} u(x)=x+1 \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{x} \Rightarrow v(x)=e^{x} \end{cases}$

$$donc :\ \int_{-1}^{0}(x+1)e^{x}dx=\left[(x+1)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x}dx$$
$$=1-\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}$$
$$=1-1+e^{-1}$$
$$=\frac{1}{e}$$

c) $A=\int_{-1}^{0}\left(f(x)+x\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}dx$

$$et\ \int_{-1}^{0}\frac{e^{x}}{e^{x}+2}dx=\left[\ln\left(e^{x}+2\right)\right]_{-1}^{0}=\ln 3-\ln\left(e^{-1}+2\right)=\ln\left(\frac{3}{e^{-1}+2}\right)$$

On a ; $\forall x\in[-1;0]\quad \frac{(x+1)e^{x}}{3}\le \frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}\le \frac{e^{x}}{e^{x}+2}$ donc :

$$\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)e^{x}}{3}dx\le A\le \int_{-1}^{0}\frac{e^{x}}{e^{x}+2}dx \Rightarrow \frac{1}{3e}\le A\le \ln\left(\frac{3}{e^{-1}+2}\right)$$