

Exercice 1

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $\frac{1}{m}z^2 + (1-3i)z - 4m = 0$ tel que $m \in \mathbb{C}^*$.

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre $8-6i$
 b) Déterminer en fonction de m ; z_1 et z_2 solutions de l'équation (E) tel que: $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$
 c) Calculer en fonction de $\arg(m)$; $\arg(z_1)$; $\arg(z_2)$.
2. On considère les points M_1, M_2, M et D d'abscisses respectives z_1, z_2, m et $1+3i$.
 a) Montrer que OMM_2 est rectangle en O .
 b) Montrer que si $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$, donc les points O, M et D sont alignés.
 c) Déterminer l'ensemble des points M tel que : $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$
3. Le point M_1' est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Et M_2' est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que $M_1 ; M_2 ; M_1' ; M_2'$ sont cocycliques.

Exercice 2

le plan P es est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les points $A_n(z_n)$ tels que :
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n \end{cases}$$

On pose : $r_n = |z_n|$

- 1) a) écrire $\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ sous forme trigonométrique .
 b) montrer que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et exprimer r_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n$
- 2) a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot e^{i\frac{n\pi}{6}}$
 b) montrer que $OA_n A_{n+1}$ est un triangle rectangle en A_{n+1}
- 3) déterminer n pour que A_n appartienne à l'axe des ordonnées.
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$
 a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_{n+1} - z_n)$
 b) En déduire d_n en fonction de n et d_0 , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Donner une interprétation géométrique à d_n .

d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n = \sum_{k=0}^n A_k A_{k+1}$, qui présente la longueur polygonale des sommets successifs $A_0; A_1; \dots; A_n; A_{n+1}$

Déterminer l'expression de L_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\alpha_n = \arg(z_n)[2\pi]$

a) Établir une relation entre α_{n+1} et α_n .

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = \frac{n\pi}{6}[2\pi]$

c) pour quelles valeurs de l'entier n les points O ; A_0 , et A_n sont alignés.

WWW.GUESSMATHS.CO