

guessmaths

Série n°2 Etude de fonctions avec solution

2ème Bac PC-SVT

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2- Vérifier que f est impaire.

3- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4- a) Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x^2+3}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

5- Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(on admet que (C_f) n'admet pas de point d'inflexion sur l'intervalle $[0; +\infty[$

6- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle I à déterminer

b) Construire dans le même repère la courbe de la fonction g^{-1} .

c) Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation : $g^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right) = x$.

Correction Exercice 1

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

1- On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 > 0\}$ Or $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2+1 > 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2- On a :
$$\begin{cases} (x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{R}) \\ f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2+1}} = -f(x) \end{cases} \quad \text{donc } f \text{ est une fonction impaire.}$$

$$3- a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

b) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} = 0$$

Interprétation géométrique :

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

4- a) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \right)'$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}} \right)' = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x \times \frac{1}{3} \times 2x \times (x^2 + 1)^{\frac{1}{3} - 1}}{\left((x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \right)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^2 (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}}{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^2 \right)}{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\left(x^2 + 1 - \frac{2}{3} x^2 \right)}{(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{(x^2 + 3)}{3(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{(x^2 + 3)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{(x^2 + 3)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}.$

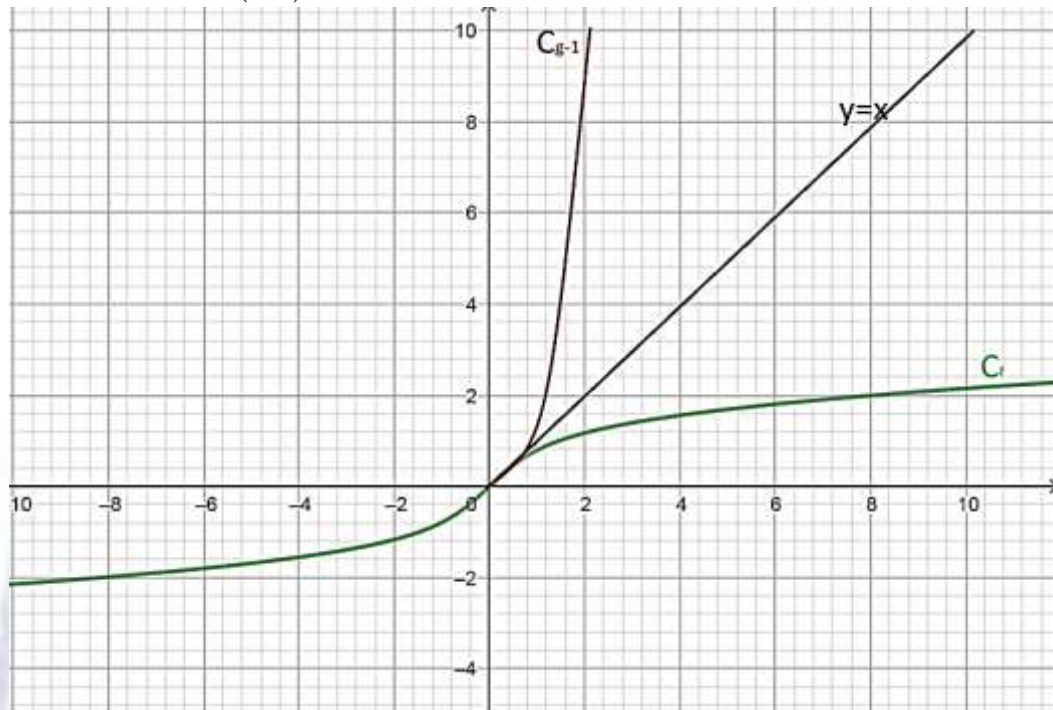
b) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 0$ et f est impaire ; dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
-----	-----	-----------

$f'(x)$	+
$f(x)$	$0 \rightarrow +\infty$

5- Construction de (C_f) et de la courbe de g^{-1}



- 6- a) f est continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc sa restriction g l'est aussi et par conséquent elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle

$$J = f([0; +\infty[) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [0; +\infty[$$

- b) Construction de la courbe de g^{-1} voir graphique ci-dessus .

- c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$x \text{ est solution de } g^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(\frac{x^2+1-2x}{2x^2+1} \right) = 0 \Leftrightarrow x^2 (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad S=\{0;1\}$$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- a) Déterminer D le domaine de définition de f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- a) Etudier la dérivabilité de f à droite du point $x_0 = 1$.
Donner une interprétation géométrique au résultat.
- b) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) f'(x) = \frac{25-9x^2}{5\sqrt{x^2-1}(4x+5\sqrt{x^2-1})}$
- c) Dresser le tableau de variation de f sur D .
- 3- a) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
- b) Déterminer les abscisses des points intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.
- c) Construire (C_f) .
- 4- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$.
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer.
- b) Calculer $(g^{-1})'(0)$
- c) Construire la courbe de la fonction réciproque de g .

Correction Exercice 2

$$f(x) = 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}$$

1- a)

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1) \geq 0\}$$

$$=]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

On a : $(\forall x \in D)$ alors $(-x \in D)$ et :

$$f(-x) = 1 - |-x| + \frac{4}{5}\sqrt{(-x)^2 - 1} = 1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1} = f(x)$$

Donc f est une fonction paire .

$$\begin{aligned} b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= -\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 + \frac{4}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{5} \right) = -\infty \right) \end{aligned}$$

2- a) Calculons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - |x| + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \quad (f(1) = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \quad (|x| = x \text{ au voisinage de } 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\left(-1 + \frac{4}{5} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{x-1} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\left(-1 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) \right) = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite du point $x_0 = 1$; est la courbe de f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 1 .

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x} \times \left(1 - x + \frac{4}{5} \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{5} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{4}{5} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{5} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{5} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{4}{5} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{5} (\sqrt{x^2 - 1} - x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{5} \frac{(x^2 - 1 - x^2)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} \right) = 1\end{aligned}$$

On conclue que (C_f) admet la droite d'équation $y = -\frac{1}{5}x + 1$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

b) Puisque f est paire donc il suffit de trouver l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses sur $[1; +\infty[$. Alors le point $M(x; y)$ appartient à cette intersection si et seulement si :

$$y = 0 \text{ et } y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + \frac{4}{5} \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \sqrt{x^2 - 1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\sqrt{x^2-1}\right)^2 = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{25}(x^2-1) - (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{25}(x-1)(x+1) - (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{16}{25}(x+1) - (x-1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{41}{25} - \frac{9}{25}x\right) = 0$$

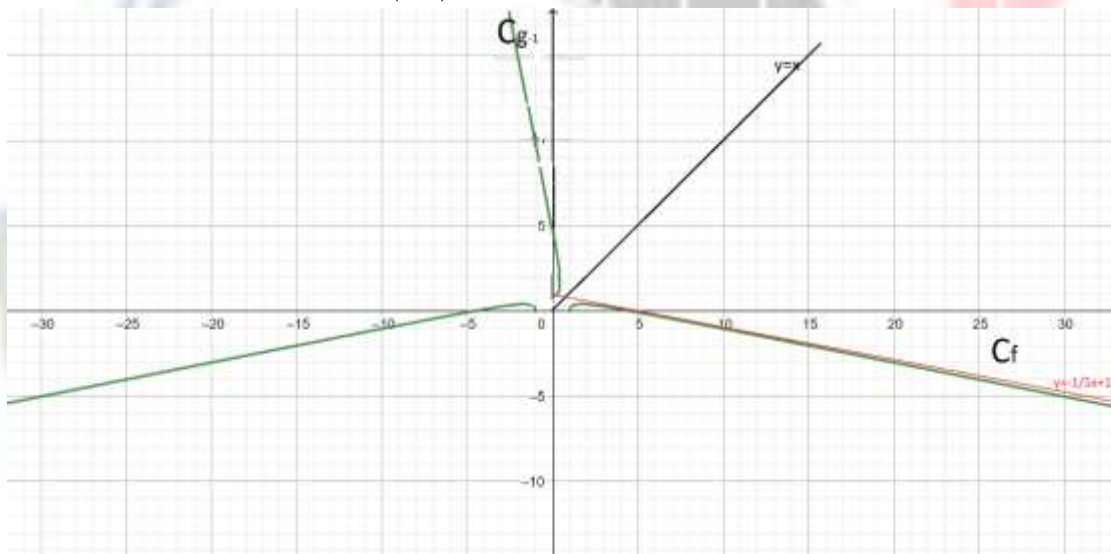
$$\Leftrightarrow (x-1)(41-9x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad x=\frac{41}{9}$$

Donc : $S_{[1;+\infty[} = \left\{\left(\frac{9}{41}, 0\right); (1, 0)\right\}$ est $S_D = \left\{(-1, 0); \left(-\frac{9}{41}, 0\right); \left(\frac{9}{41}, 0\right); (1, 0)\right\}$

S_D est l'ensemble des points intersection de la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

c) Construction de (C_f) la courbe de la fonction réciproque g^{-1} .



4- a) Comme f est continue et strictement croissante donc la restriction g l'est aussi ; et par suite g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle

$$J = f\left(\left[\frac{5}{3}; +\infty\right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f\left(\frac{5}{3}\right)\right] = \left[-\infty; \frac{2}{5}\right].$$

b) Calcul de $(g^{-1})'(0)$ D'après la question 3-b) on a :

$$f\left(\frac{41}{9}\right) = g\left(\frac{41}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{41}{9} = g^{-1}(0)$$

$$\text{donc : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'\left(\frac{41}{9}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{41}{9}\right)}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{41}{9}\right) &= -1 + \frac{4}{5} \times \frac{\frac{41}{9}}{\sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2 - 1}} \\ &= -1 + \frac{4}{5} \times \frac{41}{9\sqrt{\frac{1600}{81}}} \\ &= -1 + \frac{4}{5} \times \frac{41}{40} \\ &= \frac{-36}{200} = \frac{-9}{50} \end{aligned}$$

$$D'où : (g^{-1})'(0) = -\frac{50}{9}$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2(x-1)^2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Calculer $f(0)$ et $f(2)$.

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

3/ a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$

b- Etudier les variations de f sur son domaine de définition et dresser son tableau de variation.

c- Déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4/ Donner l'équation de la droite tangente à (C) au point $M_0(2, 0)$.

5/ Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) .

6/ Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$) la courbe (C) ; la tangente au point M_0 et l'asymptote oblique d'équation : $y = x - \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 3 :

$$f(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2(x-1)^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$$

1/ Calculons $f(0)$ et $f(2)$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } \bullet f(0) &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(2) &= 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4-3-1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2/ Calcul des limites :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x-1)^2} = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{3}{2} \right) = +\infty \quad \text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{3}{2} \right) = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote verticale au voisinage de $-\infty$.

$$3/ a- \text{ On a : } f(x) = x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2(x-1)^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}) \quad f'(x) &= 1 - \frac{1}{2} \times (-2) \times (x-1)^{-2-1} \\ &= 1 + (x-1)^{-3} \\ &= \frac{(x-1)^3 + 1}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)(x-1)^2 + 1}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x(x-1)^2 - (x^2 - 2x + 1) + 1}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x(x-1)^2 - x^2 + 2x}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x((x-1)^2 - x + 2)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x(x^2 - 2x + 1 - x + 2)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3} \quad (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$:

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad x^2 - 3x + 3 > 0$$

$$\text{Car : } \Delta = 9 - 12 = -3 < 0 \quad \text{Donc le signe de } f'(x) \text{ est celui de } \frac{x}{(x-1)^3}.$$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	
$(x-1)^3$	-		0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

D'où : f est croissante sur $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty]$ et décroissante sur $[0, 1[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	0	$+\infty$

c- d'après le tableau de variations ci-dessus on remarque que f s'annule en un seul point $x_0=2$.

4/ l'équation de la tangente à (C) au point $M_0(2, 0)$ est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \quad (\text{on a : } f(2) = 0 \text{ et } f'(2) = 2)$$

$$\Rightarrow y = 2(x-2)$$

$$\Rightarrow \text{l'équation de } \Gamma: y = 2x - 4$$

5/ On a :

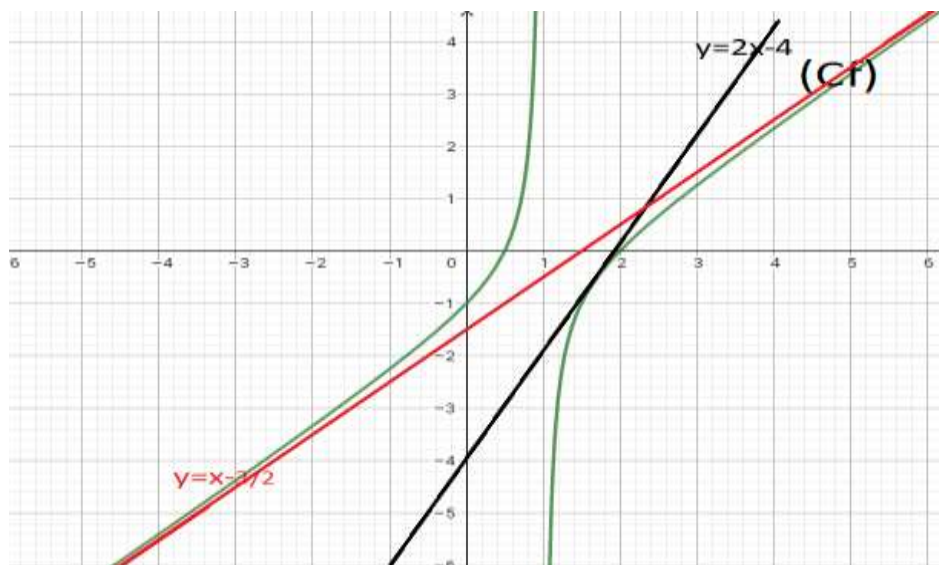
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \left(x - \frac{3}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(x - \frac{3}{2} \right) \right) = 0$$

$$\left(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \right) = 0 \right)$$

D'où la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au

voisinage $\pm\infty$

6/ Construction graphique.



Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^3} \sqrt{1+x^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminer D domaine de définition de f et vérifier que f est impaire.

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner l'interprétation géométrique des résultats obtenues.

3/ Montrer que : $(\forall x \in D) f'(x) = \frac{3}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$.

4/ Construire (C_f) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

5/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Montrer que g^{-1} est dérivable sur J .

c- Construire la courbe de g^{-1} sur le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Correction de l'exercice 4 :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3} \sqrt{1 + x^2}$$

$$1/ \bullet D = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \neq 0\} \Leftrightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}^*$$

$$D' \text{ où } D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Vérifions que f est impaire :

$$\bullet \text{ On a } \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow (-x) \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{Et } f(-x) &= \frac{2(-x)^2 - 1}{(-x)^3} \sqrt{1 + (-x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 1}{x^3} \sqrt{1 + x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc f est une fonction impaire.

$$\begin{aligned} 2/ \text{ On a : } \forall x > 0 \quad f(x) &= \frac{2x^2 - 1}{x^3} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{2x^2 - 1}{x^3} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$D'où \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \right)$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 1}{x^3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + x^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Interprétation géométrique :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: signifie que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: signifie que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe O_y) au voisinage de $-\infty$.

3/ on a : $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3} \sqrt{1 + x^2}$ la fonction $x \rightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^3}$ et $x \rightarrow \sqrt{1 + x^2}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Donc la fonction f est dérivable sur D et on a :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 1}{x^3} \sqrt{1 + x^2} \right)' \quad (\forall x \in D)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 1}{x^3} \right)' \sqrt{1 + x^2} + \left(\frac{2x^2 - 1}{x^3} \right) (\sqrt{1 + x^2})' \quad (\forall x \in D)$$

$$\text{On a : } \left(\frac{2x^2 - 1}{x^3} \right)' = \frac{4x \cdot x^3 - (2x^2 - 1) \times 3x^2}{x^6}$$

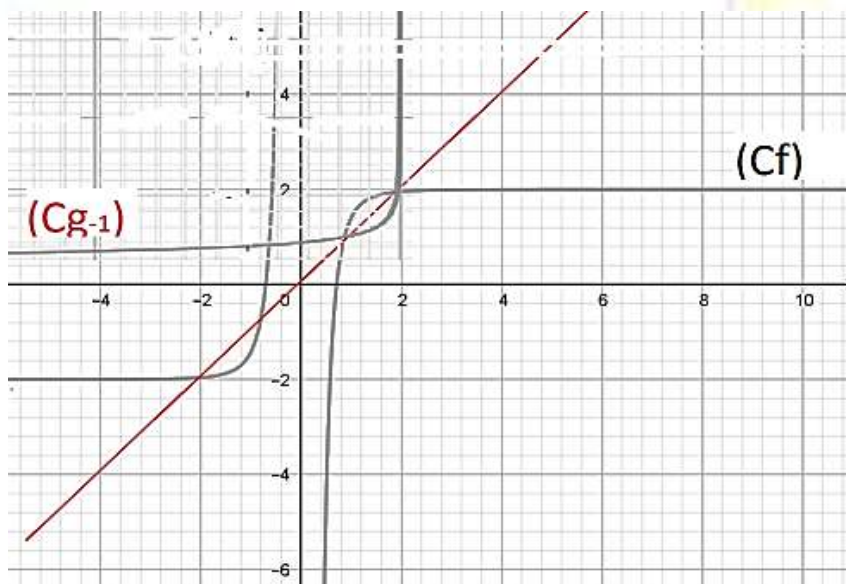
$$\begin{aligned}
 &= \frac{4x^4 - 6x^4 + 3x^2}{x^6} \\
 &= \frac{-2x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 + 3}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$Et : (\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned}
 D'où : f'(x) &= \frac{-2x^2+3}{x^4} \sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^3} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{(-2x^2+3)(\sqrt{1+x^2})^2 + (2x^2-1)x^2}{x^4 \sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{(-2x^2+3)(1+x^2) + 2x^4 - x^2}{x^4 \sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{-\cancel{2x^2} + 3 - \cancel{2x^4} + \cancel{3x^2} + \cancel{2x^4} - \cancel{x^2}}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{x^4 \sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

$$Donc : (\forall x \in D) f'(x) = \frac{3}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$$

4/ Construction de (C_f) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



5/ a - g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

Donc g est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ d'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle.

$$J = f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; 2[$$

$$b- \text{ On a } f'(x) = \frac{3}{x^4 \sqrt{1+x^2}} \text{ sur } D \text{ donc } g'(x) = \frac{3}{x^4 \sqrt{1+x^2}} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

$$\Rightarrow (\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow g^{-1} \text{ est dérivable sur } J$$

c- Construction de la courbe de g^{-1} (voir le graphique ci-dessus).

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{x}}$

1/ a- Déterminer D_f le domaine de définition de f .

b- Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$ à droite. Interpréter géométriquement le résultat.

c- Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2/ Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}$ puis dresser le tableau de variation de f

3/ Soit (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).

a- Etudier les branches infinies de (C_f)

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

c- Construire la courbe (C_f) . (On accepte que le point $A\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{4}\right)$ est un point

d'inflexion et que $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,6$)

4/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, 4[$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J à déterminer.

b- Donner l'expression de g^{-1} pour tout x dans J .

c- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction g^{-1}

Correction Exercice 5 :

On a : $f(x) = \frac{1}{2 - \sqrt{x}}$

1/ a- $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 - \sqrt{x} \neq 0 \text{ et } x \geq 0\}$

$$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq 2 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_f = [0, 4[\cup]4, +\infty[$$

b- Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 - 2 + \sqrt{x}}{2x(2 - \sqrt{x})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})} = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite du point $x_0 = 0$

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse $x_0 = 0$ dirigée vers le haut.

c - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$

2/ On a : $\forall x \in]0, 4[\cup]4, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2 - \sqrt{x}} \right)' = \frac{-(2 - \sqrt{x})'}{(2 - \sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]0, 4[\cup]4, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$

D'où $(\forall x \in D_f - \{0\}) \quad f'(x) > 0$, Donc f est croissante sur $]0, 4[\cup]4, +\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$1/2$	$+\infty$	0

3/ a- On a : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$ donc la droite d'équation $x=4$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ (càd l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b- Soit l'équation $f(x) = x$ alors :

$$(x \in \mathbb{R} / f(x) = x) \Leftrightarrow (x \in D_f) \frac{1}{2-\sqrt{x}} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{x} = 1 \quad (x \in D_f)$$

$$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{x} - 1 = 0 \quad (x \in D_f)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 2x + 1 = 0 \quad (x \in D_f)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} - x + 1 - x = 0 \quad (x \in D_f)$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x} - 1) + (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 0 \quad (x \in D_f)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(x-1-\sqrt{x})=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}-1)=0$$

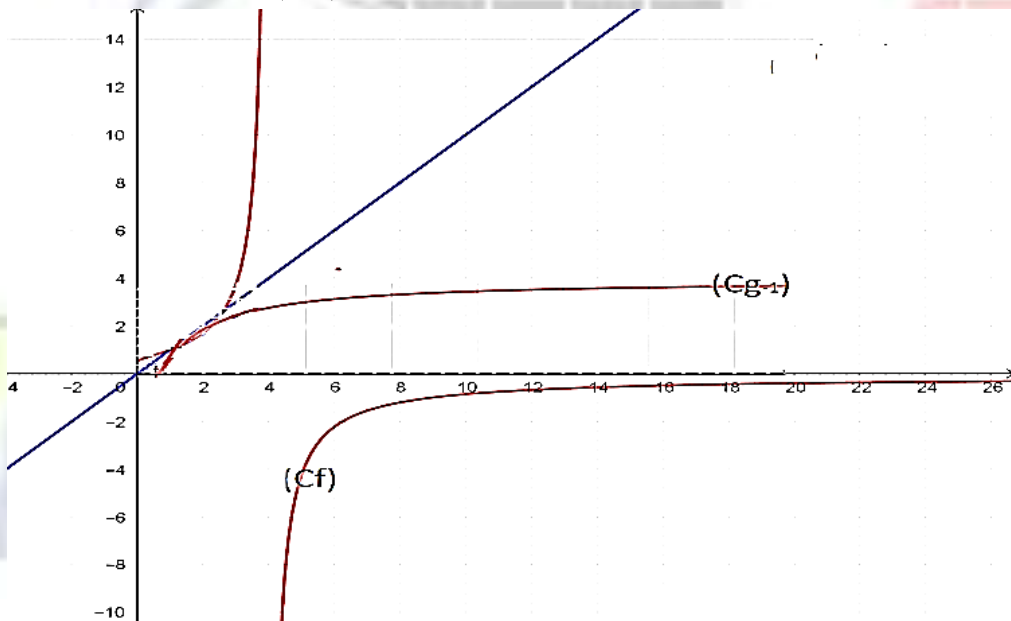
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ x-\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$\left(\text{car } \Delta=5 \text{ pour l'équation } t^2-t-1=0 \text{ on pose } \sqrt{x}=t \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \right) \text{ Donc :}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

c - Construction de (C_f)



4/ g la restriction de f sur $I = [0, 4[$

a- la fonction g est continue strictement croissante sur I donc elle admet une fonction réciproque définie sur un intervalle :

$$f(I) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \right[= \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[, \text{ donc } J = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\begin{aligned}
 \text{b- On a : } \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2 - \sqrt{y}} \\ x \in J \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x\sqrt{y} = 1 \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2x - 1 \\ x \in J \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \left(\frac{2x-1}{x}\right) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 \\ x \in J \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$D'o\grave{u} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad g^{-1}(x) = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2$$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$

b- Etudier les branches infinies de (C)

2/ a- Montrer que : $(\forall x \in] -1, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$

b- Etudier le signe de $f'(x)$; puis dresser le tableau de variation de f .

3/ Construire (C) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on accepte que (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2).

4/ Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Construire la courbe de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c- Calculer $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Correction exercice 6 :

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2 \quad (\forall x \in]-1, +\infty[)$$

1/ a- Calculons $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2 \right) \times \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} - \frac{2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Interprétation géométrique : (Branches infinies)

On a : • $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$: (C) admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2/ a- Calculons $f'(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) &= \left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2 \right)' \\
 &\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - (x+2) \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\
 &\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1) - (x+2)}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\
 &\Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cancel{2} \cancel{x} \cancel{2}}{2(x+1)\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \forall x \in]-1, +\infty[$$

b- Etudions le signe de $f'(x)$:

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \forall x \in]-1, +\infty[$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{x+1} > 0 \end{cases}$$

Donc $f'(x)$ est du même signe que x ; D'où :

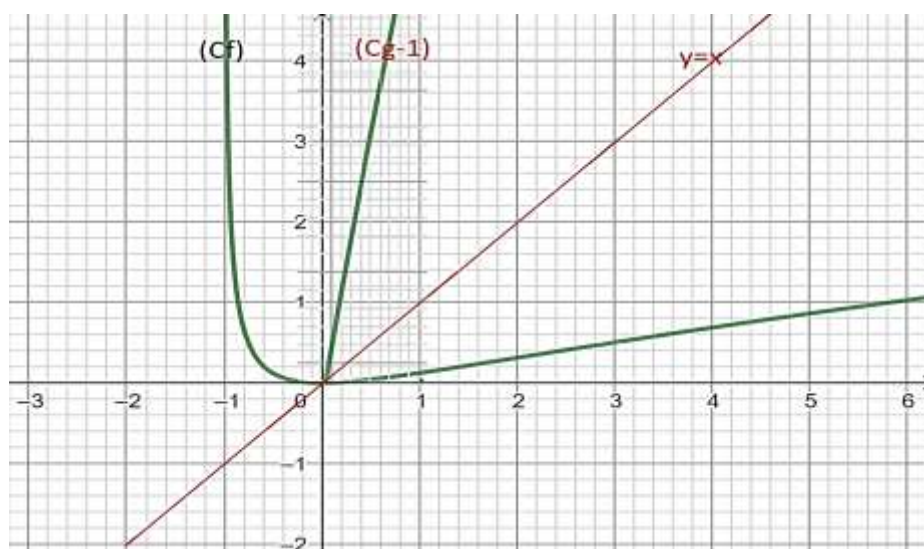
Tableau de signe de $f'(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Tableau de variation de $f(x)$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(0) = 0$	$+\infty$

3/ Construction de (C) :



4/ g la restriction de f sur $[0, +\infty[$

- a) g est continue strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = f([0, +\infty[) = \left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = [0, +\infty[$$

- b) La courbe de g^{-1} est symétrique à la portion de (C_f) sur $[0, +\infty[$ par rapport à l'axe $y=x$.

- c) Calculons $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\text{Soit } \begin{cases} \alpha = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{\alpha+1}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 4 = 5\sqrt{\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 9\alpha - 9 = 0$$

$$\Delta = 225 = 15^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4} \text{ non valable} \\ \alpha_2 = \frac{9+15}{8} = 3 \end{cases}$$

$$D'où \quad g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a : } (g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{f'(3)} \\ &= \frac{2(3+1)\sqrt{3+1}}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3}$$

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 2x}{1 + 3x}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique au résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

3/ a- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{(1 + 3\sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 + 3x)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f .

4/ Construire (C) (On accepte que (C) admet un point d'inflexion d'abscisse dans l'intervalle $]1, 2[$)

5/ Soit g la restriction de f sur $[0, 1]$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J à déterminer.

b- Construire la courbe de g^{-1} sur le même repère.

c- Montrer que : $g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$ et que : $\left(\forall x \in [0, 1] - \frac{2}{3}\right) \quad g^{-1}(x) = \left[\frac{-1 + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2 - 3x} \right]^2$

Correction Exercice 7 :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 2x}{1 + 3x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

1/ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\text{On a : } f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 2x}{1 + 3x} = \frac{x\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right)}{x\left(\frac{1}{x} + 3\right)} \quad d'où : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{x}} + 2}{\frac{1}{x} + 3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Interprétation géométrique :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ signifie que la courbe (C) admet la droite $y = \frac{2}{3}$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2/ Calculons $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

On a $f(0) = 0$ Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\sqrt{x} + 2x}{x(1+3x)} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{x}} + 2}{1+3x} \right) = +\infty$$

Interprétation géométrique :

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0 et la courbe (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point $O(0,0)$.

3/ a- Calculons $f'(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2\sqrt{x} + 2x}{1+3x} \right)' \\ &= \frac{\left(2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (1+3x) - 3(2\sqrt{x} + 2x)}{(1+3x)^2} \\ &= \frac{(1+2\sqrt{x})(1+3x) - 3\sqrt{3}(2\sqrt{x} + 2x)}{\sqrt{x}(1+3x)^2} \\ &= \frac{1+3x+2\sqrt{x}+6x\sqrt{x}-6x-6x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2} \\ &= \frac{1-3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-3(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$$

Donc $(\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \frac{(1+3\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+3x)^2}$

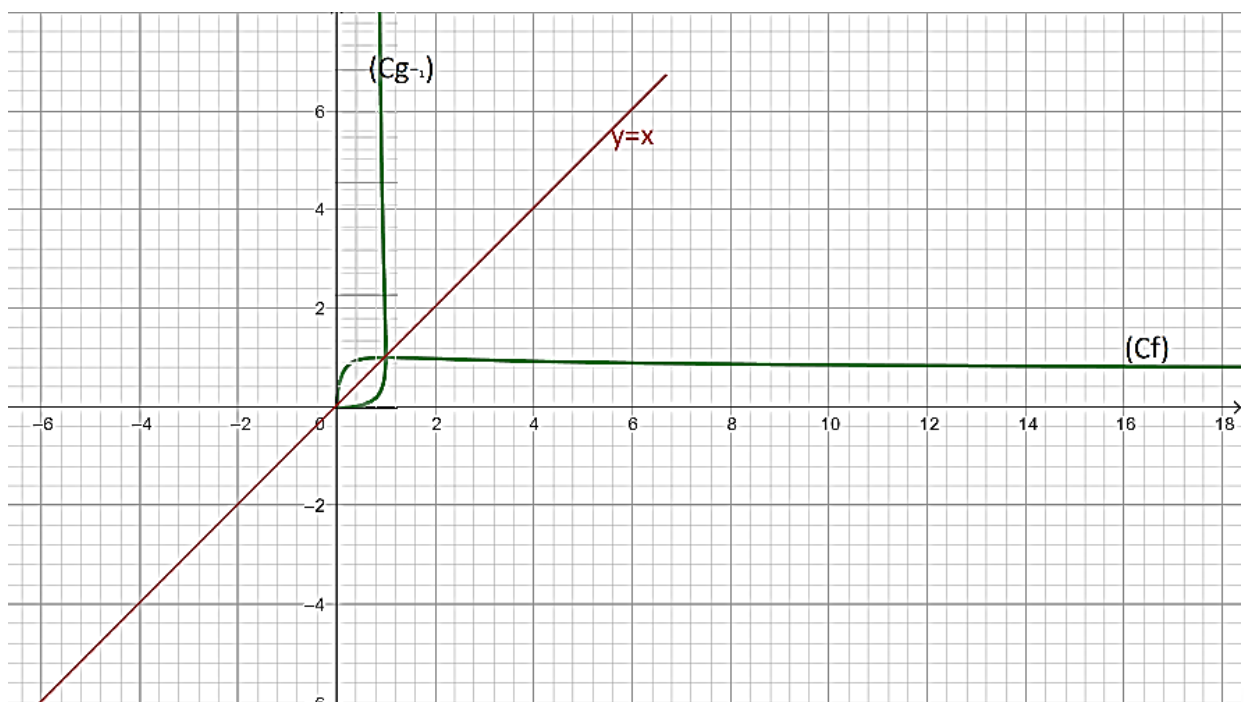
b- On a : $(\forall x \in]0, +\infty[) \frac{(1+3\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+3x)^2} > 0$

donc $f'(x)$ est du même signe que $(1-\sqrt{x})$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

Tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$f(1)=1$	$\frac{2}{3}$

4/ Construction de (C) .



5/ g la restriction de f sur $[0,1]$.

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$, donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle :

$$\begin{aligned} J &= g([0,1]) \\ &= f([0,1]) \\ &= [f(0), f(1)] = [0,1] \end{aligned}$$

b- Voir la construction de la courbe g^{-1} sur le graphique question 4. (C_g) est le symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice.

c- On a : $g\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{9}\right)$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\frac{1}{9}}{1 + 3\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{9}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3\left(\frac{2}{3} + 2\frac{1}{9}\right)}{4}$$

$$= \frac{2 + \frac{2}{3}}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Donc : $g\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$

Calculons $g^{-1}(x)$ pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in [0,1] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ x \in [0,1] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{y} + 2y}{1 + 3y} \\ x \in [0,1] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + 3y) = 2\sqrt{y} + 2y \\ x \in [0,1] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3xy - 2\sqrt{y} - 2y = 0 \\ x \in [0,1] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 3x)y + 2\sqrt{y} - x = 0 \\ x \in [0,1] \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $\sqrt{y} = t$ car $y \in [0,1]$ et on a : $x \neq \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 3x)t^2 + 2t - x = 0 \\ x \in [0,1] - \left\{\frac{2}{3}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 4 + 4x(2 - 3x) = 4(1 + 2x - 3x^2)$$

Or on a : $\forall x \in [0,1] - 3x^2 + 2x + 1 > 0$

Car $\Delta' = 4 + 12 = 16$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-3 \times 2} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-2-4}{-3 \times 2} = 1 \end{cases}$$

D'où :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$-3x^2 + 2x + 1$	-	0	+		+	0 -

$$\text{Or } \left(x \in [0,1] - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2(2-3x)} \\ t_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2(2-3x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2-3x} \\ t_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2-3x} \end{cases}$$

$$\text{Soit } x=0 \Rightarrow t_2 = -1 \notin [0,1]$$

$$\text{Donc on prend la solution } t_1 \text{ d'où : } \sqrt{y} = \frac{-1 + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2-3x}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2-3x} \right)^2$$

$$\text{Donc : } \left(\forall x \in [0,1] - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \right) g^{-1}(x) = \left[\frac{-1 + \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}{2-3x} \right]^2$$

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Détermine D le domaine de définition de f .

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (On remarque que : $x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)$)

3/ Etudier la branche infinie du (C) au voisinage de $+\infty$.

4/ a- Montrer que :

$$(\forall x \in D) f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} \right)$$

b- Dresser le tableau de variation de f .

5/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution qui appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

6/ Construire la courbe (C) .

7/ Soit g la restriction de f sur $I =]0, 2]$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b- Construire la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Correction Exercice 8 :

1/ On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 4 > 0$ Donc $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$$\Rightarrow D =]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 2/ (\forall x \in D) f(x) &= \frac{x^2 + 4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} \left(\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} - 2 \right) \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} \left(\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} - 2 \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} - 2 \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3/ Branche infinie au voisinage de $+\infty$:

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \right)$$

$$= \frac{x^2+4}{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}} \right) = 1$$

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$$

$$\text{On a : } f(x) - x = \frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} - x$$

$$= \frac{x^2+4-x^2}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

$$= \frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \right) = -\infty$$

Donc (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction de la droite d'équation $y = x$.

$$4/ a- (\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x} \right)' - 2 \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} \right)' = \left(\frac{x^2+4}{x} \right)' - 2 \left(\frac{\left(\frac{x^2+4}{x} \right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \right)$$

$$\text{On a : } \left(\frac{x^2+4}{x} \right)' = \frac{2x \times x - (x^2+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'ou : } f'(x) &= \frac{x^2-4}{x^2} - \frac{\left(\frac{x^2-4}{x} \right)}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2} - \frac{\frac{x^2-4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0, +\infty[) (x-2)^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 > 4x$$

$$\text{et } x < 4x$$

$$\text{d'ou } 0 < x < x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{x^2+4} < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x^2+4}} < 1$$

Conclusion $f'(x)$ est du même signe que (x^2-4) sur $]0, +\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0	2	$+\infty$
-----	---	---	-----------

$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

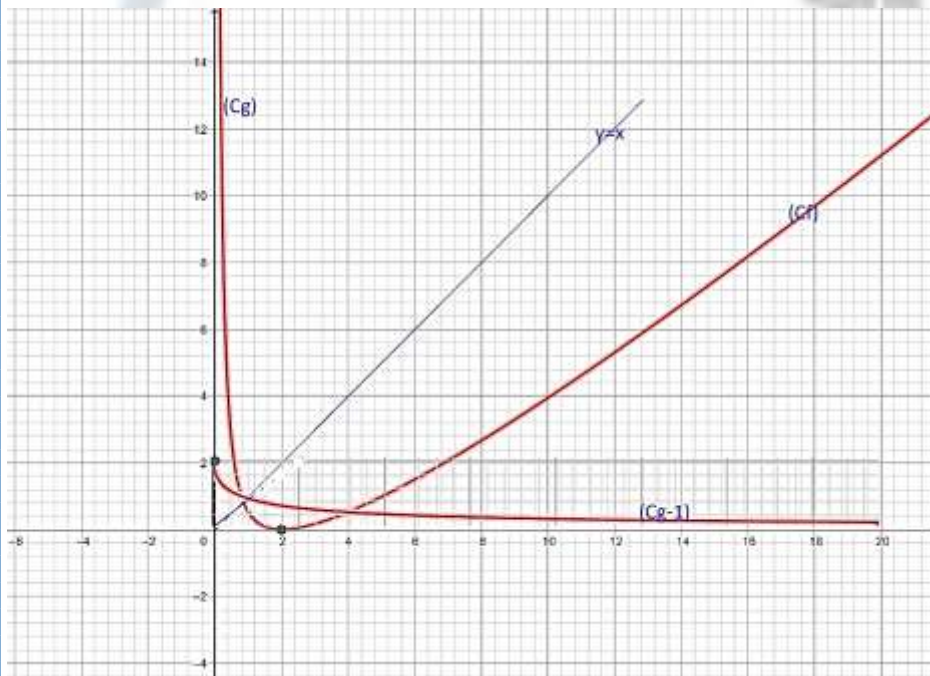
$$f(2) = \frac{4+4}{2} - 2\sqrt{\frac{4+4}{2}} = 0$$

5/ On considère la fonction $h(x) = f(x) - x$. h est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on a :

$$\begin{cases} h\left(\frac{1}{2}\right) = 8 - 2\sqrt{\frac{17}{2}} > 0 \\ h(1) = 4 - 2\sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

D'où l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et par suite l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

6/ Construction de (C).



7/ a- La restriction g de f sur $]0, 2]$ est continue strictement décroissante donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g([0, 2])$

$$J = f([0, 2]) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right[\Rightarrow J = [0, +\infty[$$

b- Construction de la courbe de $g^{-1} \rightarrow$ voir la figure dans la question 6.

La courbe de g^{-1} est symétrique à celui de f sur $]0, 2]$ par rapport à la première bissectrice $y = x$.

