

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On définit les suites (v_n) et (w_n) par: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

1- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$; (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Calculer de deux façons différentes S_n et en déduire u_n en fonction de n

2- a. Déterminer la nature de la suite (w_n) .

b. Déterminer un en fonction de v_n et w_n .

c. Retrouver u_n en fonction de n .

3- Calculer en fonction de n , la somme: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Correction

On a:
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a. Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$= -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

$$= -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)$$

$$= -\frac{2}{3}v_n$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$.

D'où : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

b. On a : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ((v_n) est une suite géométrique)

$$\text{Donc: } S_n = 1 \times \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

D'autre part, on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Donc : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$= \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_3} - \cancel{u_2} + \dots + u_n - \cancel{u_{n-1}}$$

(après simplification)

$$S_n = u_n - u_0 = u_n \text{ (car } u_0 = 0) (1 - (-3))$$

$$D'où : u_n = S_n = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$2- a. \text{ On a : } w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3} u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+2} + \frac{2}{3} u_{n+1} \\ &= \frac{1}{3} u_{n+1} + \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{3} u_{n+1} \\ &= u_{n+1} + \frac{2}{3} u_n \\ &= w_n \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = w_n$

Ainsi : (w_n) est une suite constante.

$$\text{et comme } w_0 = u_1 + \frac{2}{3} u_0 = 1$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = 1$

$$b. \text{ On a : } \begin{cases} v_n = u_{n+1} - u_n \\ w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3} u_n \end{cases}.$$

Donc :

$$w_n - v_n = \frac{2}{3} u_n + u_n = \frac{5}{3} u_n \text{ et par suite : } u_n = \frac{3}{5} (1 - v_n) ; (\text{car } w_n = 1)$$

$$c. \text{ On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n = 1 ; \text{ et } v_n = \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

(car (v_n) est une suite géométrique et de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$).

$$D'où : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$3- S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

Méthode 1: (Le signe $\sum$ sigma)

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^k \right) \\ &= \frac{3}{5} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{2}{3} \right)^k \right) \\ &= \frac{3}{5} \left(n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{2}{3} \right)^k \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{5} \left(n - \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(n - \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) \right)$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S'_n = \frac{3}{5} \left(n - \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) \right)$

Rappel :

$$1- \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{(n-p+1) \text{ fois}} = (n-p+1) \times a \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} a = \underbrace{a + a + \dots + a}_n = n \times a$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k$$

Méthode 2:

$$u_n = \frac{3}{5} (1 - v_n)$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{5} (1 - v_k)$$

De même on obtient : $S'_n = \frac{3}{5} \left(n - \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right) \right)$