Examen Normalisé n° 42 **2éme Bac PC**

Exercice 01 (04pts)

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

0. 5pt a) $\log(x-3)+\log x=1$.

0.5pt b) $(\ln x)^2-\ln x-2=0$.

0.5pt 2) Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $x\left(e^{1-x}-1\right)\leq 0$.

3) on considère les intégrales : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx$ et $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

0.75pt a) Vérifier que : $\frac{1}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}$; en déduire la valeur de l'intégrale I.

0.75pt b) calculer $J-I$ et en déduire la valeur de J.

1pt 4) A l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale : $K=\int_0^1(2x+1)\ln(x+1)dx$.

Exercice 02 (03pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n\in IN)$

0. 75pt 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in IN)$; $0\leq u_n<2$

0.5pt 2) a) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{u_n+2}$

0. 25pt b) Déduire que la suite (u_n) est croissante ; puis qu'elle est convergente.

3) On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n\in IN)$; $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$

0. 75pt a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

0. 25pt b) Donner v_n en fonction de n

0.5pt c) Montrer que: $(\forall n\in IN)$; $u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-1}$; puis déduire u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 03 (05pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

0.5pt 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$.

2) On considère les points A ; B et C du plan d'affixes respectifs : $z_A=-i\sqrt{3}$, $z_B=1-i$ et $z_C=1+i$

0. 75pt a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes : z_A ; z_B et z_C.

0. 25pt b) Soit N le symétrique du point A par rapport à B.

Vérifier que l'affixe de N est $z_N=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$.

c) On considère R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0.5pt Déterminer les affixes des points E et F images respectives de A et N par la rotation R.

3) On considère la translation T de vecteur $\vec{W}(w=2i)$.

0. 50pt Déterminer les affixes des points J et K images respectives de A et N par la translation T.

0.5pt 4) a) vérifier que le point C est le milieu des segments $[EF]$ et $[JK]$.

0. 50pt b) Montrer que : $\frac{z_F - z_C}{z_K - z_C} = i$.

0. 50pt c) Montrer que EJFK est un carré.

1pt 5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z-\sqrt{3}| = |z+i\sqrt{3}|$ où $z \in \mathbb{C}$.

Problème (8pts)

Partie I

1) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1pt Etudier les variations de la fonction g puis en déduire que : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $g(x) \geq 0$.

2) On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 1$.

0. 75pt a) Etudier les variations de la fonction h.

0. 50pt b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que : $1 < \alpha < 2$.

0. 25pt c) En déduire que $(\forall x \in [0;\alpha]) : h(x) \geq 0$ et que $(\forall x \in [\alpha;+\infty[) : h(x) \leq 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on donne $\|\vec{i}\| = 1cm$)

0. 25pt 1) a) Montrer que $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $e^x - x > 0$.(on pourra utiliser la question 1 de la **partie I**)

0. 25pt b) Vérifier que $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$

0. 50pt c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

1pt 2) Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$; En déduire le tableau de variation de f.

0.5 pt 3) a) Montrer que $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

0.5pt b) En déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

1pt c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

1pt d) Construire la courbe (C) et les droites (Δ) et (D) où (D) est la droite d'équation $y=1$ .On donne $\alpha \simeq 1{,}8$ et $f(\alpha) \simeq 1{,}2$.

0.5 pt 4) a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

0.5pt b) En déduire la primitive de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.

Partie III (Bonnus)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; pour tout $n \in IN$.

0.5pt 1) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $0 \leq u_n \leq 1$.

0.5pt 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on pourra utiliser la question 3)b) de **la partie II**)

1pt 3) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.