Exercice 1 :

Dans l'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; on considère les plan (P_m) d'équations $x+y-z-m=0$ avec m paramètre réel ; et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2) Soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la sphère (S) selon un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m) lorsque m varie dans (E)

Exercice 2 :

I. Soit f l'application définie de $\mathbb{C}-\{-1\}$ par : $f(z)=\dfrac{z+4}{z+1}$

1) Montrer que: $f\left(i\sqrt{3}-1\right)=1-i\sqrt{3}$.

2) Vérifier que: $f(z)=-z \Leftrightarrow z^2+2z+4=0$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+2z+4=0$.

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A;B et C d'affixes respectives : $z_A=-1+i\sqrt{3}$; $z_B=-1-i\sqrt{3}$ et $z_C=2$.

Et soit T la translation de vecteur $\vec{u}\left(2i\sqrt{3}\right)$.

1) a) Ecrire le nombre complexe $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ sous forme trigonométrique.

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

2) Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit du triangle ABC.

3) Soit D l'image du point C par la translation T.

Montrer que l'affixe du point D est $z_D=2+2i\sqrt{3}$

4) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

5) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que :

$$\arg\left(f(z)-1\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Exercice 3:

Soit (U_n) la suite définie par: $\begin{cases} U_0=5 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{3}U_n+2 \quad ;(\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $3\leq U_n\leq 6$.

2) Etudier la monotonie de la suite (U_n).
Que peut – on en déduire?

3) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

4) a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

5) On considère la suite (V_n) définie par : $(\forall n \in IN)$; $V_n = ln\left(\frac{U_n - 3}{2}\right)$

a) Montrer que : (V_n) est une suite arithmétique de raison $-ln3$.

b) Déterminer la valeur de l'entier naturel n tel que : $V_1 + V_2 + \cdots + V_n = ln\left(\frac{1}{27}\right)$

Exercice 4 :

Une urne contient 5 boules blanches : tel que 2 boules portent le numéro 1 et 3 boules portent le numéro 2
Et l'urne contient aussi 7boules noires dont 4 boules portent le numéro 2 et 3 boules portent le numéro 1 et toutes les Boules sont indiscernables On tire de l'urne au hasard une Boule
On considère les événements suivants :
N «On obtient une Boule noire»
B «On obtient une Boule blanche»
U «La Boule porte le numéro 1»
D «La Boule porte le numéro 2»
1) Donner la probabilité des événements suivants : B ; N ; U ; D ; $B \cap U$; $N \cap D$
2) a) sachant que La Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 1 on la note : $P_B(U)$

b) comparer : $P_B(U)$ et $\frac{P(B \cap U)}{P(B)}$

3) a) sachant que La Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 2 on la note : $P_N(D)$

b) comparer : $P_N(D)$ et $\frac{P(D \cap N)}{P(N)}$

4) a) sachant que La Boule tirée porte le numéro 1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit blanche on la note : $P_U(B)$

b) comparer : $P_U(B)$ et $\frac{P(U \cap B)}{P(U)}$

Problème :

Partie 1

On considère la fonction g définie sur IR par : g(x)=−1+xex2

1) Calculer: $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\ln 2;\ln 3[$

4) Etudier le signe de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+2+(2x-4)e^{\frac{x}{2}}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que la (D) d'équation $y=-x+2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C_f).

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f sur R.

4) Montrer que: $f(\alpha)=4-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$

5) Vérifier que $f(2)=0$ et construire la courbe (C_f). (On prend $\alpha\approx 0,7$).

6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=]-\infty;\alpha[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $(h^{-1})'(-2)$ (Remarquer que $h(0)=-2$).

7) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2(2x-4)e^{\frac{x}{2}}dx=\dfrac{5-e}{2}$

b) Calculer en cm2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.