Série n° 1 sur « Les Primitives » **_2éme Bac S.Maths_**

Exercice 1

quelle est la primitive de la fonction suivante : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$

Correction

Il est inutile ici de transformer les expressions trigonométriques ou de les linéariser.

En effet il suffit de remarquer que cette primitive est de la forme : $\dfrac{u'}{u^4}$

En consultant la table des primitives on en déduit instantanément qu'une primitive est : $x \mapsto \dfrac{1}{3\cos^3 x}$

Exercice 2

quelle est la primitive de la fonction suivante : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$

Correction

Il est encore inutile ici de transformer les expressions trigonométriques ou de linéariser.

En effet cette primitive est de la forme : $\dfrac{u'}{u^2+1}$

En consultant la table des primitives on en déduit instantanément qu'une primitive est : $x \mapsto \arctan(\sin x)$

Exercice 3

quelle est la primitive de la fonction suivante : $x \mapsto \dfrac{1}{5x^2 - 3x + 7}$

Correction

Avant de partir dans une décomposition en éléments simples posons-nous la question suivante : peut-on mettre cette fonction sous la forme de la dérivée de $\dfrac{\arctan\left(\dfrac{x+b}{a}\right)}{a}$ *? En effet, en consultant la table des primitives on sait qu'une primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{(x+b)^2 + a^2}$ *est la fonction* $x \mapsto \dfrac{\arctan\left(\dfrac{x+b}{a}\right)}{a}$

Effectuons donc la transformation suivante : $\dfrac{1}{5x^2 - 3x + 7} \rightleftarrows \dfrac{1}{(x+b)^2 + a^2}$

a *et* ***b*** *sont deux constantes réelles qu'il nous faut déterminer.*
Mais attention : avant de vouloir identifier les coefficients des deux fractions il faut que leur numérateur et dénominateur soient "similaires". Il faut donc se mettre dans les conditions de l'égalité, c'est-à-dire que tous les coefficients qui ne contiennent ni ***a*** *ni* ***b*** *soient égaux. C'est le cas du coefficient du monôme de plus haut degré du dénominateur, ainsi que de la constante du numérateur.*

La réelle transformation à effectuer est alors la suivante : $\dfrac{1}{5x^2-3x+7}=\dfrac{\frac{1}{5}}{x^2-\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}}$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{x^2-2\times\frac{3}{10}x+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{7}{5}-\left(\frac{3}{10}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{131}{100}}$$

$$=\frac{1}{5}\frac{10}{\sqrt{131}}\frac{\frac{\sqrt{131}}{10}}{\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{131}}{10}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{131}}\frac{\frac{\sqrt{131}}{10}}{\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{131}}{10}\right)^2}$$

Donc pour $a=\dfrac{\sqrt{131}}{10}$ et $b=-\dfrac{3}{10}$

Et on en déduit la primitive recherchée : $\dfrac{2}{\sqrt{131}}\dfrac{arctan\left(\dfrac{x-\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{131}}{10}}\right)}{\frac{\sqrt{131}}{10}}=\dfrac{10\times 2}{\sqrt{131}}\dfrac{arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{131}}\right)}{\sqrt{131}}$

$$=\frac{20}{\sqrt{131}}\frac{arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{131}}\right)}{\sqrt{131}}$$