guessmaths

Correction examen nationale 2009 Session de Rattrapage

2éme Bac SM A et B

Exercice 1 : (3 points)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire d'élément neutre $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel.

Soit $V=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) • On a : $V\neq\varnothing$ car $O=M_{(0;0)}\in V$; et $V\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour tout $M_{(a;b)}$ et $M_{(c;d)}$ de V et pour tout $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$; on a :

$$\begin{aligned}\alpha M_{(a;b)}+\beta M_{(c;d)}&=\alpha\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c&d\\4d&c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\4\alpha b&\alpha a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta c&\beta d\\4\beta d&\beta c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\alpha b+\beta d\\4(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}\\&=M_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}\in V\end{aligned}$$

Donc V est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$.

• Soit $M_{(a;b)}\in V$; on a :

$$\begin{aligned}M_{(a;b)}&=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\4b&0\end{pmatrix}\\&=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}\\&=aI+bJ\end{aligned}$$

Où $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}$; donc (I,J) est une famille motrice de l'espace V.

De plus pour tout $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$; on a : $\alpha I+\beta J=O\Rightarrow\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\4\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc (I,J) est une famille libre de l'espace V.

Par suite (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(V,+,\bullet)$ et $\dim V = 2$

2) a) Soient $M_{(a;b)}$ et $M_{(c;d)}$ deux éléments de V ; on a :

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ 4d & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ac+4bd & ad+bc \\ 4(ad+bc) & ac+4bd \end{pmatrix}$$
$$= M_{(ac+4bd\,;\,ad+bc)} \in V$$

Donc V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

b) On a : – $(V,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel ; donc $(V,+,\bullet)$ est un groupe commutatif.

– $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau donc $\times$ est associative et distributive sur $+$; comme V une partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\times$ est associative et distributive sur $+$ dans V.

– I est l'élément unitaire de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ et $I = M_{(1;0)} \in V$ donc $I = M_{(1;0)}$ est l'élément unitaire de V.

– $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = M_{(ac+4bd\,;\,ad+bc)}$
$$= M_{(ca+4db\,;\,da+cb)}$$
$$= M_{(c;d)} \times M_{(a;b)}$$

Donc $(V,+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif.

3) a) On a : $M_{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)} = M_{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4\times\frac{-1}{4}\times\frac{1}{4};\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}\times\frac{1}{2}\right)}$
$$= M_{(0;0)} = O$$

b) On a : $M_{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)} = O$ est $M_{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4}\right)} \neq O$ et $M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)} \neq O$; l'anneau $(V,+,\times)$ n'est pas intègre ; d'où l'anneau $(V,+,\times)$ n'est pas un corps.

4) Soit X un élément de V tel que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2$

a) On a : $X^2 - 2aX + (a^2-4b^2)I = \left(M_{(a;b)}\right)^2 - 2aM_{(a;b)} + (a^2-4b^2)I$
$$= M_{(a^2+4b^2;2ab)} - M_{(2a^2;2ab)} + M_{(a^2-4b^2;0)}$$
$$= M_{(a^2+4b^2-2a^2+a^2-4b^2;2ab-2ab)}$$

$$= M_{(0;0)} = O$$

Donc $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation.

b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$; donc

$$X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O \Leftrightarrow (X - 2aI)X + (a^2 - 4b^2)I = O$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - 4b^2}(2aI - X)X = I$$

Et on a : $\frac{1}{a^2 - 4b^2}(2aI - X) = \frac{1}{a^2 - 4b^2}\left(2aM_{(1,0)} - M_{(a,b)}\right)$

$$= \frac{1}{a^2 - 4b^2} M_{(a,-b)}$$

$$= M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}$$

Donc X admet un inverse dans $(V,+,\times)$; $X^{-1} = \frac{1}{a^2 - 4b^2}(2aI - X) = M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2}, \frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}$

Exercice 2 : (4 points)

Soit u un nombre complexe différent de $(1-i)$

L'équation $(*)$: $z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$

1) a) On a : $(iu - 1 - i)^2 = -u^2 + 2(1-i)u + 2i$

b) On a : $\delta = (u+1-i)^2 - (2u^2 - 4i)$

$$= u^2 + 2(1-i)u + (1-i)^2 - (2u^2 - 4i)$$

$$= u^2 + 2(1-i)u + -2i - 2u^2 + 4i$$

$$= -u^2 + 2(1-i)u + 2i$$

$$= (iu - 1 - i)^2$$

Donc l'équation $(*)$ admet pour solutions :

$z_1 = u + 1 - i + iu - 1 - i$
$= (1+i)u - 2i$

$z_2 = u + 1 - i - iu + 1 + i$
$= 2 + (1-i)u$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est $S = \{(1+i)u - 2i ;= 2 + (1-i)u\}$

2) Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, B, U et Ω dont les affixes sont respectivement

$a = (1+i)u - 2i$; $b = (1-i)u + 2$; u et $\omega = 2 - 2i$

a) • On a I milieu du segment $[AB]$; donc l'affixe de I est :

$$z_I = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{(1+i)u - 2i + (1-i)u + 2}{2}$$

$= 1 - i + u$

Donc $z_I = 1 - i + u$

● t la translation de vecteur $\vec{u}$ qui transforme le point U au point I ; déterminons l'affixe de $\vec{u}$; on a : $z_{\vec{u}} = z_I - z_U$

$$= 1 - i + u - u$$
$$= 1 - i$$

L'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation t est $z_{\vec{u}} = 1 - i$

b) L'expression complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega = 2 - 2i)$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

est : $z' = ze^{-i\frac{\pi}{2}} + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\omega$

$$= -iz + 2 - 2i + i(2 - 2i)$$
$$= -iz + 4$$

Et on a : $-ia + 4 = -i((1+i)u - 2i) + 4$

$$= -iu + u - 2 + 4$$
$$= (1-i)u + 2 = b$$

Donc $R(A) = B$

c) On a : $R(A) = B \Rightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle ΩAB est rectangle en Ω ; de plus I milieu du segment $[AB]$

D'où (ΩI) est la médiatrice du segment $[AB]$.

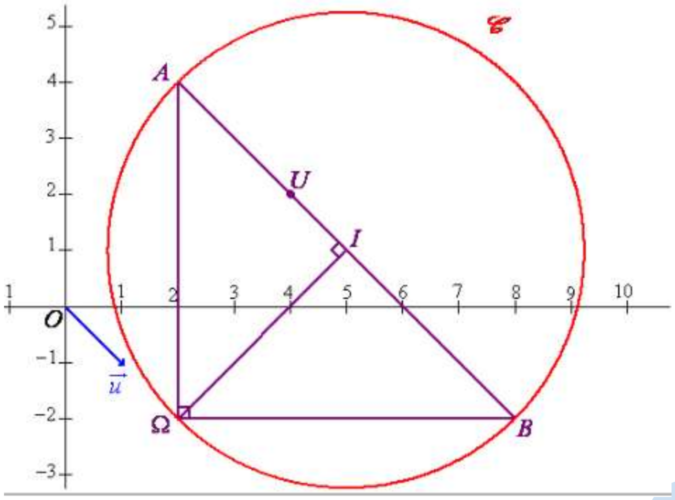
Par suite (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires.

d) construction des points A et B à partir du point U.

- On construit le point I du fait que : $t(U) = I$; donc $\vec{u} = \overrightarrow{UI}$
- Comme $(\Omega I) \perp (AB)$ donc les points A et B appartiennent à la droite Δ qui passe par I et qui est perpendiculaire à (ΩI)
- le triangle ΩAB est rectangle en Ω ; et I milieu du segment $[AB]$

  Alors I est le centre du cercle Γ qui circonscrit le triangle ΩAB ; donc A et B sont les points d'intersection de Δ et du cercle Γ ; on choisit A et B de façon que le triangle ΩAB soit indirect $\left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Construction (on prend $U(u = 4 + 2i)$) .



3) On pose : $u=\alpha(1+i)-2i$; où $(\alpha\in\mathbb{R})$

a) • $z_{\overrightarrow{AB}}=b-a$

$$
\begin{aligned}
&=(1-i)u+2-((1+i)u-2i)\\
&=-2iu+2+2i\\
&=-2i(\alpha(1+i)-2i)+2+2i\\
&=2(-i\alpha+\alpha-(1-i))\\
&=2(\alpha(1-i)-(1-i))\\
&=2(1-i)(\alpha-1)
\end{aligned}
$$

• $z_{\overrightarrow{AU}}=u-a$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha(1+i)-2i-a\\
&=a(1+i)-2i-((1+i)u-2i)\\
&=(1+i)(\alpha-\alpha(1+i)+2i)\\
&=(1+i)(-\alpha i+2i)\\
&=-i(1+i)(\alpha-2)\\
&=(1-i)(\alpha-2)
\end{aligned}
$$

b) On a : $\begin{cases} z_{\overrightarrow{AU}}=(1-i)(\alpha-2)\\ z_{\overrightarrow{AB}}=2(1-i)(\alpha-1)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{u-a}{b-a}=\dfrac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\in\mathbb{R}$

Donc les points A ; B et U sont alignés.

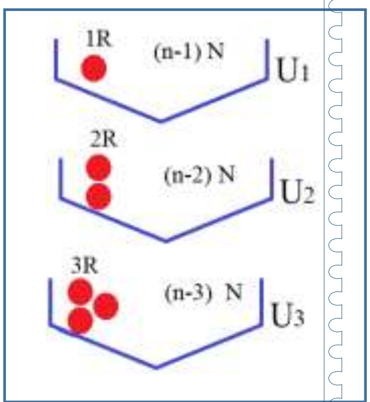
<u>Exercice 3</u> : (3 points)

Soit n un entier naturel tel que : $n\geq 4$

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement l'un des trois caisses puis on tire simultanément deux boules de la caisse choisie.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules Rouges tirées.



1- Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont $0;1$ ou 2.

Et l'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

2- a) On considère les événements suivants :

A_i « Choisir la caisse i » tel que $1\le i\le 3$

les événements A_i sont non compatible et forme une partition de Ω.

Donc $p(X=2)=p(A_1)p_{A_1}(X=2)+p(A_2)p_{A_2}(X=2)+p(A_3)p_{A_3}(X=2)$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2+C_3^2}{C_n^2}$$

$$=\frac{8}{3n(n-1)}$$

D'où $p(X=2)=\dfrac{8}{3n(n-1)}$

b) $p(X=1)=p(A_1)p_{A_1}(X=1)+p(A_2)p_{A_2}(X=1)+p(A_3)p_{A_3}(X=1)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1C_{n-1}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_{n-3}^1}{C_n^2}$$

$$=\frac{1}{3C_n^2}\left(C_{n-1}^1+2C_{n-2}^1+3C_{n-3}^1\right)$$

$$=\frac{2}{3n(n-1)}\left((n-1)+2(n-2)+3(n-3)\right)$$

$$=\frac{2\times(6n-14)}{3n(n-1)}$$

$$=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

D'où $p(X=1)=\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

c) On a : $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=1\Rightarrow p(X=0)=1-\dfrac{8}{3n(n-1)}-\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

$$\Rightarrow p(X=0)=\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

X_i	0	1	2
$p(X=X_i)$	$\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

3- Sachant qu'on a obtenue deux boules Rouges ; la probabilité pour que le tirage soit effectué de la caisse U_3 est $p_{(X=2)}(A_3)$.

On a : $p(X=2)p_{(X=2)}(A_3)=p(A_3)p_{A_3}(X=2)\Rightarrow \frac{8}{3n(n-1)}p_{(X=2)}(A_3)=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}$

$$\Rightarrow p_{(X=2)}(A_3)=\frac{3}{4}$$

<u>Problème</u> : (10 points)

I- On a $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$: $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1) a) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$; on a : $g'(x)=2e^{-x}-1$.

On a : $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{-x}-1=0$

$$\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(2)$$

- Si $x\le\ln(2)\Leftrightarrow -x\ge\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\ge\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-x}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$$

- Si $x\ge\ln(2)\Leftrightarrow -x\le\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-x} - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) \le 0$$

Donc $g'(x) \ge 0$ sur $[0;\ln(2)]$ et $g'(x) \le 0$ sur $[\ln(2);+\infty[$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2(1-e^{-x}) - x = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$)

Tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

2) a) – g est continue strictement croissante sur $[0;\ln(2)]$; et

$g([0;\ln(2)]) = [0;1-\ln(2)]$; de plus $0 \notin [0;1-\ln(2)]$; donc l'équation $g(x)=0$

n'admet pas de solution dans $[0;\ln(2)]$.

– g est continue strictement décroissante sur $[\ln(2);+\infty[$; et

$g([\ln(2);+\infty[) =]-\infty;1-\ln(2)]$; de plus $0 \in]-\infty;1-\ln(2)]$; donc d'après TVI

l'équation $g(x)=0$ unique α dans l'intervalle $]-\infty;1-\ln(2)]$

Comme • $g(\ln 4) = 2(1-e^{-\ln 4}) - \ln 4$

$$= 2\left(1-\frac{1}{4}\right) - \ln 4$$

$$= \frac{3}{2} - \ln 4 > 0$$

• $g(\ln 6) = 2(1-e^{-\ln 6}) - \ln 6$

$$= 2\left(1-\frac{1}{6}\right) - \ln 6$$

$$= \frac{5}{3} - \ln 6 < 0$$

Donc $g(\ln 6) < 0 < g(\ln 4) \Rightarrow g(\ln 6) < g(\alpha) < g(\ln 4)$

$$\Rightarrow \ln 4 < \alpha < \ln 6$$

(on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

b) g est continue strictement croissante sur $[0;\ln(2)]$; donc

$$\forall x \in [0;\ln(2)] \Leftrightarrow 0 \le x \le \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow g(0) \le g(x) \le g(\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \le g(x) \le 1-\ln 2$$

$$\Leftrightarrow g(x) \ge 0$$

g est continue strictement décroissante sur $[\ln(2);\alpha]$; donc

$$\forall x \in [\ln(2);\alpha] \Leftrightarrow \ln(2) \le x \le \alpha$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) \le g(x) \le g(\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \le g(x) \le 1-\ln 2$$

$$\Leftrightarrow g(x) \ge 0$$

g est continue strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$; donc

$$\forall x \in [\alpha;+\infty[\Leftrightarrow x \ge \alpha$$

$$\Leftrightarrow g(x) \le g(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow g(x) \le 0$$

Conclusion

$g(x) \le 0$ sur l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ et $g(x) \ge 0$ sur l'intervalle $[0;\ln(2)]$ et sur l'intervalle $[\ln(2);\alpha]$.

3) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\left(1-e^{-u_n}\right) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \le u_n \le \alpha$

- Pour n=0
  On a $u_0 = 1$; donc $1 \le u_0 \le \alpha$
- Soit $n \in \mathbb{N}$
  Supposons que $1 \le u_n \le \alpha$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

On a (hypothèse de récurrence) : $1 \le u_n < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < -u_n \le -1$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} < e^{-u_n} \le e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-1} \leq 1-e^{-u_n} < 1-e^{-\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) \leq 2\left(1-e^{-u_n}\right) < 2\left(1-e^{-\alpha}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha$$

Car $2\left(1-e^{-1}\right)-1 = g(1) \geq 0 \Rightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) \geq 1$ et

$2\left(1-e^{-\alpha}\right)-\alpha = g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right) = \alpha$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1}-u_n = 2\left(1-e^{-u_n}\right)-u_n$

$$= g\left(u_n\right)$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n = g\left(u_n\right)$

c) On sait d'après la question 3)a) que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in [1;\alpha[$

et d'prés la question 2)b) $g(x) \geq 0$; sur $[0;\alpha[$; d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n \geq 0$

Donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) • la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ; majorée par α ; donc elle est convergente.

• On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; et soit la fonction h définie par : $h(x) = 2\left(1-e^{-x}\right)$

On a : – h est continue sur $u_n \in [1;\alpha[$

– $h([1;\alpha[) \subset [1;\alpha[$

– $u_0 = 1 \in [1;\alpha[$

– $u_{n+1} = h\left(u_n\right)$

– $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Donc ℓ est solution de l'équation $h(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$; d'où $\ell = \alpha$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) On a : • $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-e^x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\times\frac{e^x-1}{x}\right) = -\infty \quad \left(car \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty \quad \left(car \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0 \ et \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\right)$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{e^x}{x^3}\right)=-\infty \quad \left(car \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=0 \ et \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)=+\infty\right)$$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

2) a) On a : $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right)-\alpha=0$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}=\frac{2-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{\alpha}=1-\frac{2}{2-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{\alpha}=-\frac{\alpha}{2-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)=\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; dont la fonction au dénominateur ne s'annule pas) pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)'$$

$$=\frac{-x^2e^x-2x\left(1-e^x\right)}{x^4}$$

$$=\frac{-xe^x-2\left(1-e^x\right)}{x^3}$$

$$=\frac{e^x\left(-x-2\left(e^{-x}-1\right)\right)}{x^3}$$

$$=\frac{e^x\left(2\left(1-e^{-x}\right)-x\right)}{x^3}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{x^3}$$

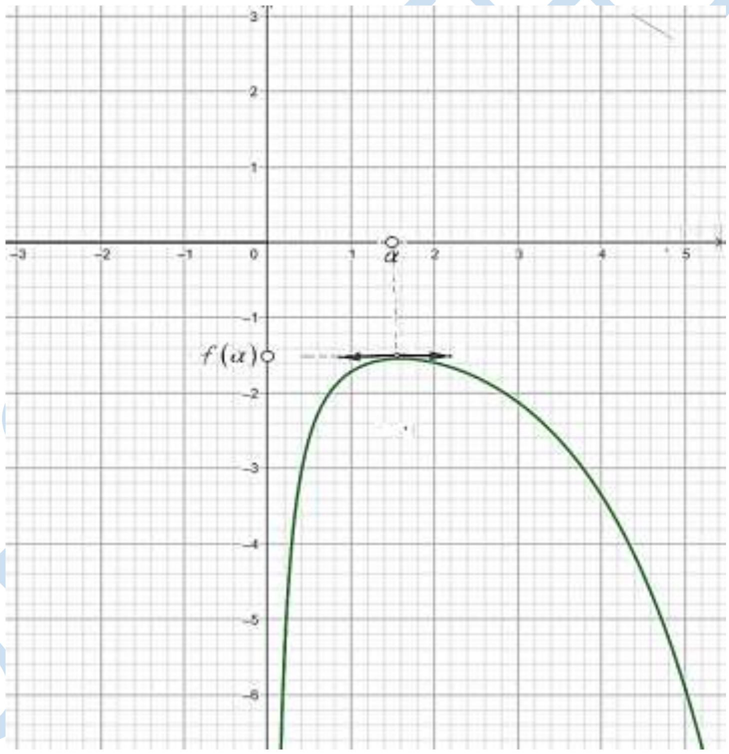
Donc $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)$; $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{x^3}$

$f'(x)$ est du même signe que $g(x)$; d'où :

Le tableau de variations de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ $\searrow$ $-\infty$

3) Construction de la courbe (C) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prend $\alpha \simeq 1,5$)



III- On considère la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(0) = -\ln 2 \\ F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad (\forall x > 0) \end{cases}$$

0.5 1) a) pour tout $x > 0$; on a :

On pose : $\begin{cases} u(t) = 1 - e^t & u'(t) = -e^t \\ v'(x) = \dfrac{1}{t^2} & v(x) = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$

Donc $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$

$$=\left[\frac{-1}{t}\left(1-e^t\right)\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\left(-\frac{1}{t}\right)\left(-e^t\right)dt$$

$$=\frac{-\left(1-e^{2x}\right)}{2x}-\frac{-\left(1-e^x\right)}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

D'où $(\forall x>0)$; $F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$

b) Montrons que : $(\forall x>0)$; $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$

On a : $x\leq t\leq 2x\Leftrightarrow e^x\leq e^t\leq e^{2x}$

$$\Leftrightarrow\frac{e^x}{t}\leq\frac{e^t}{t}\leq\frac{e^{2x}}{t}$$

$$\Leftrightarrow\int_x^{2x}\frac{e^x}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow e^x\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$$

c) On a : $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$; et $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x\ln 2=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{2x}\ln 2=\ln 2$

Alors par encadrement on obtient : $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt=\ln 2$.

On a : $(\forall x>0)$; $F(x)=\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$; donc

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\right)=-\ln 2$$

(car $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt=\ln 2$)

Et $F(0)=-\ln 2$; donc F est continue à droite en 0.

2) a) Pour tout $x>0$; On a : $x\leq t\leq 2x\Leftrightarrow e^x\leq e^t\leq e^{2x}$

$$\Rightarrow 1-e^t\leq 1-e^x$$

$$\Rightarrow\frac{1-e^t}{t^2}\leq\frac{1-e^x}{t^2}$$

$$\Rightarrow\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt\leq\left(1-e^x\right)\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dt$$

$$\Rightarrow F(x)\leq\left(1-e^x\right)\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow F(x) \leq (1-e^x)\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$$

Donc $(\forall x>0)$; $F(x) \leq \dfrac{1-e^x}{2x}$

b) On a : $(\forall x>0)$; $F(x) \leq \dfrac{1-e^x}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^x}{2x} = -\infty$

Donc par encadrement on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$

3) $t \mapsto \dfrac{e^t-1}{t^2}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ donc elle admet une primitive φ sur $]0,+\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x)-\varphi(x)$

On sait que : φ et $w : x \mapsto 2x$ deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$; donc $x \mapsto \varphi(2x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$; d'où la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$; on a : $F'(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt$

$$= (\varphi(2x)-\varphi(x))'$$

$$= (2x)'\varphi(2x)-\varphi'(x)$$

$$= 2\frac{1-e^{2x}}{(2x)^2} - \frac{1-e^x}{x^2}$$

$$= \frac{1-e^{2x}}{2x^2} - \frac{1-e^x}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-1}{x^2} - \frac{2(e^x-1)}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-1-2xe^x+2}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2xe^x+1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2$

4) a) Soit $x \in]0,+\infty[$.

- F est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$; d'après le théorème des accroissements finis : $(\exists \beta \in]0,x[) / F(x) - F(0) = (x-0)F'(\beta)$

$$(\exists \beta \in]0,x[) / F(x) - F(0) = -\frac{x}{2}\left(\frac{e^\beta - 1}{\beta}\right)^2$$

- La fonction Exponentielle est continue sur $[0,\beta]$ et dérivable sur $]0,\beta[$; d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c \in]0,\beta[) / e^\beta - 1 = \beta e^c$

Donc $(\exists c \in]0,x[)$; tel que : $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$

b) pour tout $x \in]0,+\infty[$: $0 < c < x \Rightarrow 0 < 2c < 2x$

$$\Rightarrow 1 < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{2x} < -\frac{1}{2}e^{2c} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{2x} < \frac{-\frac{1}{2}xe^{2c}}{x} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$

c) On a : $\lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) = -\frac{1}{2}$; donc par encadrement $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{F(x) - F(0)}{x}\right) = -\frac{1}{2}$

D'où F est dérivable à droite en 0 et que : $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$