EXERCICE 1:

1. a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n .

   b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7[9]$.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n: $10^n \equiv 1[9]$.

   b) On désigne par N un entier naturel écrit en base 10, non appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante: $N \equiv S[9]$.

   c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = 2005^{2005}$; on désigne par:

■ B la somme des chiffres de A.
■ C la somme des chiffres de B.
■ D la somme des chiffres de C.

   a) Démontrer la relation suivante: $A \equiv D[9]$.

   b) Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

   c) Démontrer que : $C < 45$.

   d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e) Démontrer que : $D = 7$.

EXERCICE 2:

Déterminer l'entier relatif n pour que $\dfrac{n+16}{n+4}$ soit un entier.

Sachant que : $312 = 62 \times 5 + 2$ déterminer le reste de la division euclidienne de -312 par 5.

EXERCICE 3:

Soit $n \in IN$.

1. Montrer que si $p \in IN$ premier divise $1 + n!$ alors $p > n$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

On suppose $n \geq 2$.

3. Montrer que si $k \in IN$ et $2 \leq k \leq n$ alors k divise $n! + k$.
4. Montrer que pour tout $\alpha , \beta > 0$ il existe p, q premiers tels que $\alpha < p < q$ et $\beta < q - p$.

EXERCICE 4:

Nombres de Fermat $\left(2^{2^m} + 1\right)$

1. Montrer que si $(a,n) \in IN \times IN$ alors $(a+1)$ divise $\left(a^{2n+1} + 1\right)$.
2. Montrer que si $(m,n) \in IN \times IN$ avec n impair alors $\left(2^{2^m} + 1\right)$ divise $\left(2^{n2^m} + 1\right)$.
3. Montrer que si $\left(2^d + 1\right)$ est premier alors il existe $m \in IN$ tel que $d = 2^m$.
4. Vérifier que 641 divise $\left(2^{32} + 1\right)$ et que $32 = 2^5$.

EXERCICE 5:

Justifier que l'équation : $5x - 9y = 14$ n'admet aucun couple d'entiers $(x ; y)$ solution.

On souhaite maintenant résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 13x + 9y = 2$.

Justifier que (E) possède au moins un couple d'entiers solution.

Déterminer un couple $(x_0;y_0)$ *d'entiers solution de* (E).

Montrer que l'équation (E) *est équivalente à* $(E'):13(x-x_0)=-9(y-y_0)$.

Montrer que si $(x;y)$ *est un couple d'entiers solution de* (E) *alors il existe un entier* k *tel que :*

$x=-4+9k$ *et* $y=6-13k$.

Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation (E).

EXERCICE 6:

L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème de Gauss :
Soient a, b et c trois entiers non nuls.
Si a divise le produit bc *et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.*
1) Rappeler le théorème de Bézout.
2) Montrer qu'il existe deux entiers u et v tels que : $acu+bcv=c$.
3) En déduire que a divise c.

EXERCICE 7:

1. On considère l'équation $(E):109x-226y=1$ *où x et y sont des entiers relatifs.*

a) Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) *?*

b) Montrer que l'ensemble de solutions de (E) *est l'ensemble des couples de la forme* $(141+226k;68+109k)$ *, où k appartient à* $\mathbb{Z}$*. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que* $109d=1+226e$ *. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)*

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a\leq 226$ *. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de* a^{109} *par 227 ; à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de* a^{141} *par 227.*

a) Vérifier que $g\left[f(0)\right]=0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat : Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$.

b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226}\equiv 1\ [227]$.

c) En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g\left[f(a)\right]=a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)]=a$ *?*

EXERCICE 8:

1. On considère l'équation $(E):6x+7y=57$ *où x et y sont des entiers relatifs.*

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ *tel que* $6u+7v=1$*; en déduire une solution particulière* $(x_0\ ;\ y_0)$ *de l'équation* (E).

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *de l'espace.*

On considère le plan (P) *d'équation :* $6x+7y+8z=57$ *On considère les points du plan* (P) *qui appartiennent aussi au plan* $(O;i,j)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan (P) *dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.*

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p+1$ *où p est un entier naturel. Montrer que le reste dans la division euclidienne de* $p+z$ *par 3 est égal à 1.*

c. On pose $p+z=3q+1$ *où q est un entier naturel.*

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x+p+4q=7$ *. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.*

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) *dont les coordonnées sont des entiers naturels.*