GUESSMATHS

Revue n°5 : Chapitre « Nombres complexes»

2éme Bac SC. Maths

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

I- RAPPELS

1. Définitions

a) Forme algébrique

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a+bi$, où i vérifie l'égalité $i^2=-1$, a et b étant des réels quelconques.

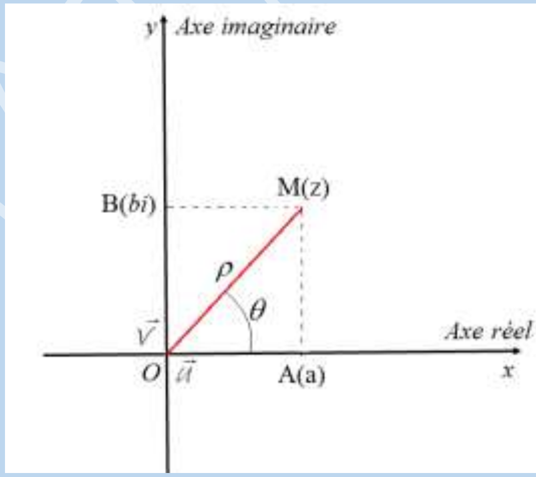
Soit $z=a+bi$

Alors $a=\mathcal{R}e(z)$ et $b=\mathcal{I}m(z)$.

Si $b=0$, alors z est réel . Si $a=0$, alors z est imaginaire pur.

- **Égalité** : deux nombres complexes $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$ sont égaux si, et seulement si, $a=a'$ et $b=b'$.

Représentation géométrique



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, à tout complexe $z=a+bi$, on associe le point $M(a,b)$ et réciproquement, à tout point du plan, on peut associer un nombre complexe.

$M(a,b)$ est l'image de z et z est l'affixe de $M(a,b)$; est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

Forme trigonométrique

Soit $z=a+bi$ et M son image dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- Le module de est le réel positif $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Géométriquement $|z|=OM=\|\overrightarrow{OM}\|$,

- Un argument de $z\ (z\neq 0)$ est le nombre défini à $2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ près par :

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{\rho}\\ \sin\theta=\dfrac{a}{\rho}\end{cases}$$

Géométriquement θ est, à $2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ près, la mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

On a alors : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ c'est la forme trigonométrique de z .

Exemples :

Soit $z=-3i$. Alors $|z|=3$; $\arg z\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$ donc $z=3i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Soit $z=1+i$. Alors $|z|=\sqrt{2}$; $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Opérations

a- Complexe conjugué.

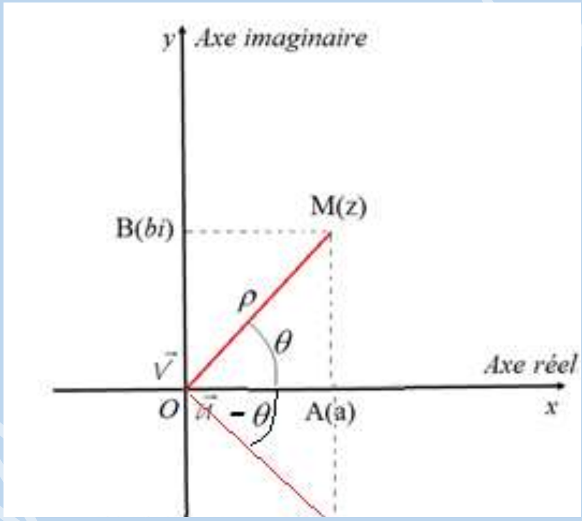
Définition

Soit $z=a+bi$.

Le complexe conjugué de z est $\bar{z}=a-bi$.

Géométriquement, $\bar{z}$ l'affixe de M' symétrique de M d'affixe z par rapport à l'axe des réels.

On a : $|z|=|\bar{z}|$ et $\arg z\equiv-\arg\bar{z}\,[2\pi]$

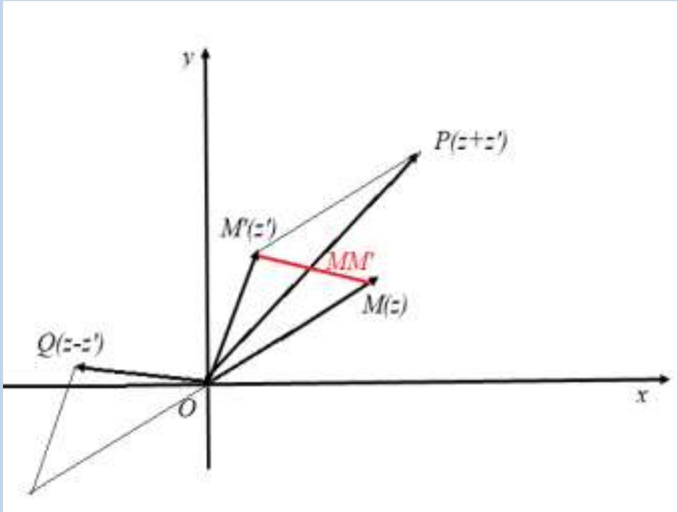


Propriétés

- $\mathcal{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$
- $\mathcal{Im}(z)=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$.
- $z\bar{z}=|z|^2$

b- Addition.

Géométriquement,
Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' alors :
le point M' d'affixe $(z+z')$ est le point P tel que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$
le point Q d'affixe $(z'-z)$ est le point tel que $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM'}$.
$(z'-z)$ est donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et $MM'=|z'-z|$.



b- Produit

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z' = a' + b'i \end{cases}$$

Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme trigonométrique.
En effet

$$\begin{cases} z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta') \end{cases} \Rightarrow zz' = \rho\rho'\left((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right)$$

$$\Rightarrow zz' = \rho\rho'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$$

Propriétés

- $|zz'| = |z||z'|$
- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$

c- Inverse et quotient

En utilisant les formules ci-dessus, on vérifie que l'on a :

Propriétés

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \; (z \neq 0)$
- $\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \; (z' \neq 0)$
- $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$

d- Puissance

Soit $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $z \neq 0$.

En utilisant les propriétés du produit, on montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

Exemples :

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right)$

$$= 2^{10}\left(\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)\right)$$

$$= -1024^{10}$$

II- NOTATION EXPONENTIELLE

1. Formule de Moivre

En appliquant la formule ci-dessus à un nombre complexe de module 1, $z = \cos\theta + i\sin\theta$, on obtient, pour tout entier naturel n , la formule de Moivre : $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Par analogie avec les puissances, on pose par définition : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Exemples :

Pour $\theta = \pi$, $e^{i\theta} = -1$

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $e^{i\theta} = i$.

La formule de Moivre devient alors $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (propriété analogue à celle des puissances).

Les formules donnant l'argument d'un produit ou d'un quotient deviennent :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Remarque :

La formule de Moivre est vraie aussi pour entier relatif.

2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Propriété

Tout nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ peut s'écrire $\rho e^{i\theta}$.

Exemple d'utilisation :

Calcul du module et de l'argument de $z = \dfrac{i}{1+i}$. ;

$$z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{donc} \quad \left|\frac{i}{1+i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \arg\left(\frac{i}{1+i}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

3. Formules d'Euler,

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; alors $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$$= \cos\theta - i\sin\theta$$

En additionnant membre à membre, on obtient $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et en soustrayant membre à membre on obtient $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$.

$$\text{D'où } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

- **Application : linéarisation de sinus et cosinus**

Exemple :

Linéarisation de $\cos^3\theta$ et de $\sin^3\theta$.

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3e^{i\theta} \times \underbrace{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}_{=1} + 3\underbrace{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}_{=1} \times e^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right)$$

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8i^3}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} - 3e^{i\theta} \times \underbrace{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}_{=1} + 3\underbrace{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}_{=1} \times e^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(2i\sin(3\theta) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(2i\sin(3\theta) - 3\times 2i\sin(\theta)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3\theta) - 3\sin\theta\right)$$

III- RÉSOLUTION DANS $\mathbb{C}$ DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS DANS $\mathbb{C}$

1. Équation $z^2 = a$

Si $a = 0$, l'équation admet la solution « double » $z = 0$.

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ avec $a \neq 0$.

On cherche z sous forme trigonométrique : $z = re^{ix}$.

On a : $z^2 = a \Leftrightarrow r^2 e^{2ix} = \rho e^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2x = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\rho}\ (r > 0) \\ x = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ z_2 = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\rho}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z_2 = \sqrt{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\rho}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z_2 = \sqrt{\rho}\, e^{i\pi} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{\rho}\ e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = -z_1 \end{cases}$$

D'où les solutions z_1 et z_2.

Ces nombres z_1 et z_2 sont les racines carrées complexes de a, elles sont opposées.

Exemple :

Résoudre l'équation $z^2 = 3+4i$.

On a : $|3+4i| = 5$; donc $3+4i = 5\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$

Soit θ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$; alors $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

D'où les deux solutions : $z_1 = \sqrt{5}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{5}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. Équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois complexes donnés ($a \neq 0$)

On a : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (forme canonique du trinôme).

On sait qu'il existe deux complexes δ et $-\delta$ tels que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$ et donc on a toujours deux solutions de l'équation qui sont $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$.

Donc toute équation du second degré a deux solutions (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$.

Remarque :

Si a, b et c sont réels et si $\Delta < 0$, les deux solutions sont deux complexes conjuguées.

Exemple 1 :

Résoudre dans l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

$\Delta = 1-4 = -3 = (3i)^2$; $\boxed{S = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2};\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Exemple 2 :

Résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$

$$\Delta = \left(2(1+i)\right)^2 + 20(1+2i)$$
$$= 4(5+12i)$$

Il faut alors résoudre l'équation $\delta^2 = 4(5+12i)$. On pose $\delta = x + iy$

$\delta^2 = 4(5+12i) \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 4(5+12i)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ x^2 + y^2 = 52 \\ 2xy = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 32 \\ 2x^2 = 72 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

D'où les solutions de l'équation $\delta^2 = 4(5+12i)$ sont $\delta = 6+4i$ et $-\delta = -6-4i$

Généralisation :

On démontre, et nous l'admettrons, que tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ distinctes ou confondues.

IV- TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Soit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto z' = f(z)$.

Soit, dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point M d'affixe z et le point M' d'affixe z'

On définit ainsi, dans le plan, la transformation géométrique associée à f qui, à tout point M fait correspondre le point M'.

1. Transformation associée : $f : z \mapsto z' = z + b$ où $b = \alpha + \beta i$

$M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \alpha \\ y' - y = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = \beta + y \end{cases}$$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto z' = z + b$ est donc **la translation de vecteur** $\vec{w}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

2. Transformation associée à f : $f : z \mapsto k(z-\omega)+\omega \quad$ où $k \in \mathbb{R}^*$

Soit Ω un point du plan complexe d'affixe ω

$$M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow z'-\omega = k(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-\omega| = |k||z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \arg(k)[2\pi] \end{cases}$$

- $k>0$ *alors* $\arg(k) \equiv 0[2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv 0[2\pi]$
- $k<0$ *alors* $\arg(k) \equiv \pi[2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \pi[2\pi]$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto k(z-\omega)+\omega$ est donc **l'homothétie de centre Ω et de rapport k.**

3. Transformation associée à $f : z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

Soit Ω un point du plan complexe d'affixe ω

$$M'(z') = M(z) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

4. Transformation associée à $f : z \mapsto az\left(a = \rho e^{i\theta}; \rho > 0\right)$

$$M'(z') = M(z) \Leftrightarrow z' = az$$
$$\Leftrightarrow z' = az$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = \rho|z| \\ \arg(z') \equiv \arg(z') + \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \rho OM \\ \left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) + \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \rho OM \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Cette transformation géométrique est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle θ et de l'homothétie de centre O et de rapport ρ.

Cette transformation géométrique associée à $f : z \mapsto az\left(a = \rho e^{i\theta} ; \rho > 0\right)$ s'appelle une similitude de centre O, de rapport ρ et d'angle θ.

Exemple.

$f : z \mapsto 3iz = 3e^{i\frac{\pi}{2}}z$

La transformation géométrique associée à f est la similitude de centre O, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Remarques :

Si $|a| = 1$, il s'agit alors d'une rotation.

Si $\arg(a) \equiv \pi[\pi]$, il s'agit alors d'une homothétie.

Racines n-èmes d'un nombre réel ou complexe :

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 = 8$ n'a qu'une seule solution : $x = 2$; en effet :

$x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)$ et le trinôme $x^2 + 2x + 4$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ puisque son discriminant est $-12 < 0$.

Dans $\mathbb{C}$, la même équation $x^3 = 8$ possède 3 solutions : $x = 2$, $x = -1 - i\sqrt{3}$, $x = -1 + i\sqrt{3}$: ce sont les racines cubiques de 8 dans $\mathbb{C}$, également dites racines troisièmes de 8.

Plus généralement si n désigne un entier naturel non nul, on appelle racine n-ème du nombre complexe z, tout nombre r tel que $r^n = z$.

Théorème :

Tout nombre complexe non nul z possède n racines n-èmes

Ce résultat est évident en tant que conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

On le prouve aussi très simplement en utilisant la forme trigonométrique des complexes : soit ρ le module et θ un argument de z défini à $2k\pi$. On a $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.

Posonsr $= m\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$, $m > 0$; selon la formule de Moivre, on a

$r^n = m^n\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right)$; par suite : $m^n = \rho$ et $n\alpha \equiv \theta[2\pi]$. D'où : $m = \sqrt[n]{\rho}$ et

$\alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ où $k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

Ce qui fournit n racines n-èmes distinctes. Vérifions que ces racines ne dépendent pas du choix de θ : si θ' est un autre argument de z, alors $\theta' = \theta + 2k'\pi$, ce qui fournit

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\theta'}{n} + \frac{2k\pi}{n}\\ &= \frac{\theta + 2k'\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\\ &= \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+k')\pi}{n}\\ &= \frac{\theta}{n} + \frac{2k''\pi}{n} \quad \text{où } k'' \in \{0;1;2;.....;n-1\}\end{aligned}$$

Or k et k' sont des entiers relatifs arbitraires, il en est donc de même de k + k' : on retrouve les racines n-èmes α précédemment calculées.

Ensemble de points dont l'affixe vérifie une propriété

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

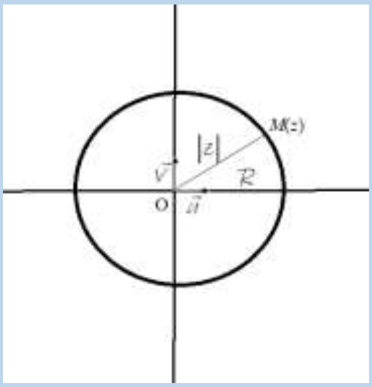
Avant tout ce qu'il faut comprendre, c'est la correspondance entre les nombres complexes et le plan. A toute propriété sur des nombres complexes corresponds une propriété sur les images de ces nombres complexes.

a un nombre complexe correspond un point ou un vecteur.

$|a|$ un module de nombre complexe correspond une distance ou une norme de vecteur.

$Arg(a)$ un argument de nombre complexe correspond une mesure d'angle orienté de vecteurs.

Exemples d'ensembles de points :



- **Ensemble des points M d'affixe z tels que :** $|z| = R$

où R est un nombre réel strictement positif.

Cet ensemble est le cercle de centre O et de rayon R.

Explication :

z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

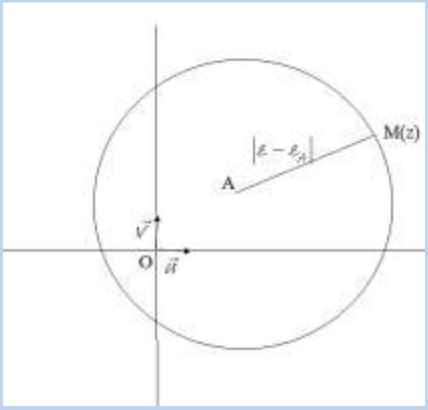
$|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM

L'ensemble des points M du plan tels que : $|z| = R$ est donc l'ensemble des points M tels que : $OM = R$; Cet ensemble de point est le cercle de centre O et de rayon R.

- *Ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - z_A| = R$*

  où z_A est l'affixe d'un point A du plan et R est un nombre réel strictement positif.

  Cet ensemble de point est le cercle de centre A et de rayon R.



Explication :

z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

z_A est l'affixe du point A ou du vecteur $\overrightarrow{OA}$

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}$

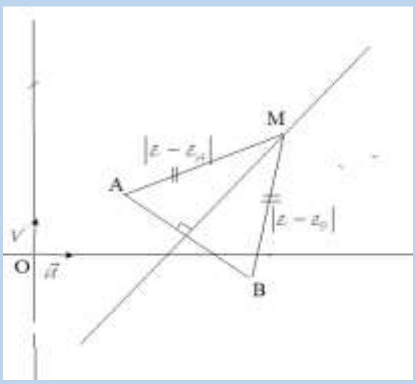
$|z - z_A|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM

L'ensemble des points M du plan tels que : $|z - z_A| = R$ est donc l'ensemble des points M tels que : $AM = R$

- ***Ensemble des points M d'affixe z tels que :** $|z - z_A| = |z - z_B|$*

où z_A et z_B sont les l'affixes respectifs de deux points A et B distincts du plan.

Cet ensemble de points est la médiatrice du segment $[AB]$



- **Explication :**

  $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

  $z - z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$

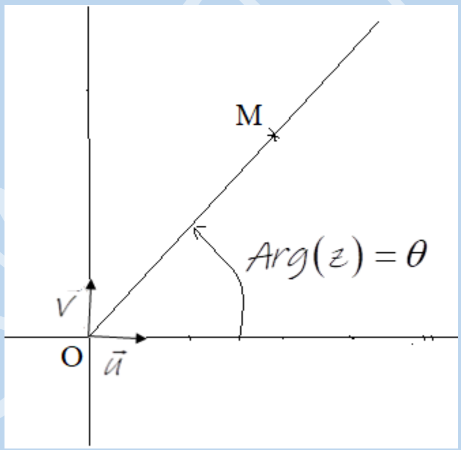
  $|z - z_A|$ est la distance AM

  $|z - z_B|$ est la distance BM

  Ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est donc l'ensemble des points M tels que : $AM = BM$

- **Ensemble des points M d'affixe z tel que** $Arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

Cet ensemble est une demi droite d'origine O (O non compris dans la demi droite) et dont l'angle avec l'axe $(O, \vec{u})$ mesure θ radians.



- **Explication :**

z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$

$Arg(z)$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

l'ensemble des points M tels que $Arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ est l'ensemble des points M tels que :

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta[2\pi]$; c'est la demi-droite du plan d'origine O qui fait un angle de mesure θ avec l'axe des réels.

- **Ensemble des points M d'affixe z tels que** $Arg(z - z_A) \equiv \theta[2\pi]$

où z_A est l'affixe d'un point A et θ est un réel.

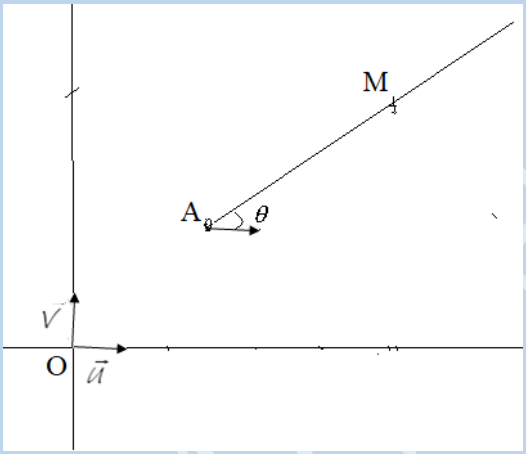
Cet ensemble est une demi-droite d'origine A (A non compris dans cette demi-droite) et dont l'angle avec la parallèle à l'axe des réels passant par A mesure θ radians.

Explication :

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

- $Arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

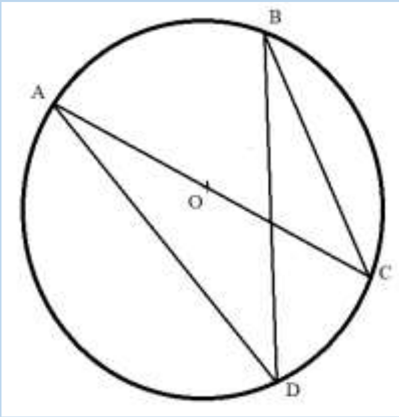
l'ensemble des points M tels que $Arg(z - z_A) \equiv \theta[2\pi]$ est l'ensemble des points M tels que : $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \theta[2\pi]$; c'est la demi-droite du plan d'origine A qui fait un angle de mesure θ avec l'axe des réels.



- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est réel est l'axe des réels.
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est un imaginaire pur est l'axe des imaginaires purs.

Points cocycliques

Des points du plan sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle. Deux points, trois points non alignés sont cocycliques. Quatre points A,B,C,D non alignés sont cocycliques si et seulement si $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \times \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$



Exercices d'application

1) Écrire sous la forme algébrique, les nombres complexes :

- $z_1 = (1+i)^2$ • $z_2 = (2-3i)(2+3i)$ • $z_3 = (2+i)(3-5i)$ • $z_4 = (1+i)^3$
- $z_5 = \dfrac{1+i}{i}$ • $z_6 = \dfrac{1+i}{1-i}$ • $z_7 = \dfrac{1}{2+i}$ • $z_8 = \dfrac{2+i}{3-2i}$

2) Donner le module et un argument des nombres complexes :.

- $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ • $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ • $z_3 = -1+i\sqrt{3}$ • $z_4 = -1-i\sqrt{3}$
- $z_5 = -\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ • $z_6 = \sqrt{2}(1-i)$ • $z_7 = 10-10i$ • $z_8 = -2i$

3) Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes de module et d'argument :

- $z_1 : \rho = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ • $z_2 : \rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$
- $z_3 : \rho = 1$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ • $z_4 : \rho = 2$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$
- $z_5 : \rho = 4$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ • $z_6 : \rho = 2$ et $\theta = \pi$

4) $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan, placer les points d'affixe z :

- $z_1 = 2i$ • $z_2 = 1-i$ • $z_3 = -z_2$
- $z_4 = \overline{z_2}$ • $z_5 = 2+i$ • $z_6 = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercices d'entrainement

CALCUL DANS $\mathbb{C}$

5) Soient $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.

a. Calculer $(z_1)^2$; le comparer à z_2.

b. Calculer $(z_2)^2$; le comparer à z_1.

c. Calculer $(z_1)^3$ et $(z_2)^3$.

d. Calculer $1+z_1+z_2$.

6) Soient les nombres complexes $a = \sqrt{3}-i$; $b = 2-2i$ et $z = \dfrac{a^4}{b^3}$.

a. Donner le module et un argument de a , b , a^4 et b^3 .

b. Donner la forme algébrique de a^4 et b^3, puis de z .

c. Calculer le module et un argument de z.

d. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

7) a. Écrire les nombres complexes $(1+i)$, $(1-i)$, $(1+i)^5$, $(1-i)^3$ sous forme exponentielle.

b. En déduire l'écriture exponentielle du complexe $z=\frac{(1-i)^3}{(1+i)^5}$.

8) x est un nombre réel, z est le nombre complexe défini par $z=\frac{1+6ix}{1-2ix}$.

M est le point d'affixe z dans le plan complexe.

a. Calculer $|z+1|$.

b. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+1|=2$ lorsque décrit $\mathbb{R}$.

9) z est un nombre complexe quelconque.

On pose $Z=\frac{z+2i}{1-iz}$.

a. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

i) Z est réel ;

ii) Z est imaginaire pur.

10) On considère le nombre complexe $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

a. On note I , A B , C , D , les points du plan complexe d'affixes 1 , a , a^2 , a^3 , a^4 . Vérifier que $a^5=1$ et montrer que : $IA=AB=BC=CD=DI$. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité : 4 cm).

b. i) Vérifier que, pour tout nombre complexe z : $a^5-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$ et en déduire que : $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

ii) Montrer que $a^3=\bar{a}^2$ et que $a^4=\bar{a}$ et en déduire que : $(a+\bar{a})^2+(a+\bar{a})-1=0$.

c. Résoudre l'équation : $x^2+x-1=0$ et en déduire, à partir de (b.) la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$.

11) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On appelle l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe : $Z=\frac{z-2+i}{z+2i}$

a. Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

On vérifiera que : $\mathcal{R}e(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$.

b. En déduire la nature de :

i) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel,

ii) l'ensemble F des points M d'affixe z, tels que Z soit un imaginaire pur

iii) représenter ces deux ensembles.

Niveau 1

Exercice1 :

Ecrire sous forme algébrique, les nombres complexes suivants :

$$(2+3i)^2(1-2i) \quad , \quad \frac{3+i}{3-5i} \quad , \quad \frac{2+\sqrt{3}+i}{2-\sqrt{3}-i}$$

Exercice2 :

On pose $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1) Calculer j^2 , j^3 , j^{2021}

2) Ecrire sous forme algébrique, le nombre complexe suivant :

$$\mathrm{E} = 1 + j + \cdots\cdots + j^2 + j^3 + j^{2021}$$

CORRECTION :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1) $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2}$

D'où : $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$j^3 = j^2 \cdot j = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$j^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$j^{2021} = j^{3\times 673+2} = \left(j^3\right)^{673} \cdot j^2$$

Donc : $j^{2021} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $E = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2020} = \frac{1 - j^{2021}}{1 - j}$

$$= \frac{1 - j^2}{1 - j} = 1 + j$$

D'où : $E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Exercice3</u> :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $(2+i)z + 1 - 3i = 0$; $(1+i)z + i\bar{z} = 2 - 4i$

<u>CORRECTION</u> :

$(1) : (2+i)z + 1 - 3i = 0$

$$\Leftrightarrow (2+i)z = -1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{2+i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(-1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+i+6i+3}{5}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

Alors : $S = \left\{\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i\right\}$

$(2) : (1+i)z + i\bar{z} = 2 - 4i$

On pose : $z = x + iy$ où $\left((x;y) \in IR^2\right)$

$(2) \Leftrightarrow (1+i)(x+iy) + i(x - iy) = 2 - 4i$

$$\Leftrightarrow x + iy + xi - y + xi + y = 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow x + i(2x + y) = 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 - 8i$$

Donc : $S = \{2 - 8i\}$

Exercice4 :

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+i$; $3+2i$ et $2-3i$

1) Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2) Déterminer les réels a et b pour que C soit le barycentre des points $A(a)$ et $B(b)$ avec $a+b=1$

CORRECTION :

2) C'est le barycentre de $A(a)$ et $B(b)$ $\Leftrightarrow z_c = \dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$

$$\Leftrightarrow -2-3i = a(2+i)+(3+2i)b \ (car\ a+b=1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-3i = 2a+ai+3b+2bi \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-3i = 2a+3b+i(a+2b) \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=-2 \\ a+2b=-3 \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=-2 \\ a+b+b=-3 \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-4 \\ a+b=5-4=1 \end{cases}$$

Donc : $a=5$ et $b=-4$

Exercice5 :

Soit z un nombre complexe et soit M son image dans le plan complexe.

Déterminer l'ensemble des points M tel que : $z+\bar{z} = z\bar{z}$

Exercice6 :

Soit A le point d'affixe 1.

À tout nombre complexe z différent de 1, on lui associe le nombre complexe $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $Z \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur

CORRECTION :

1) Pour tout $z \neq 1$; on pose : $Z = \frac{1+z}{1-z}$

$Z \in IR \Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

$\Leftrightarrow \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1+z}{1-z}$

$\Leftrightarrow (1+\overline{z})(1-z) = (1+z)(1-\overline{z})$

$\Leftrightarrow 1-z+\overline{z}-z\overline{z} = 1-\overline{z}+z-z\overline{z}$

$\Leftrightarrow 2\overline{z} = 2z$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z$

$\Leftrightarrow z \in IR$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$

Donc : l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$, est l'axe des réels privé du point $A(1)$

2) $Z \in iIR \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

$\Leftrightarrow \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{-1-z}{1-z}$

$\Leftrightarrow (1+\overline{z})(1-z) = (-1-z)(1-\overline{z})$

$\Leftrightarrow 1-z+\overline{z}-z\overline{z} = -1+\overline{z}-z+z\overline{z}$

$\Leftrightarrow 2 = 2z\overline{z}$

$\Leftrightarrow |z| = 1$

$\Leftrightarrow OM = 1$

Donc : l'ensemble des points $M(z)$ tels que :$Z \in i\mathbb{R}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $A(1)$

Exercice7 :

Soit z un nombre complexe différent de 1 et soit $M(z)$ son image dans le plan complexe.

On pose : $Z = \frac{(2+i)z+1}{z-1}$, $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$

1) Déterminer $\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(z)$ en fonction de x et y

2) a- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$

b- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$

CORRECTION :

Pour tout $z \neq 1$, on pose : $Z = \dfrac{(2+i)z+1}{z-1}$

1) $Z = \dfrac{((2+i)z+1)(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}$

$Z = \dfrac{2x^2 2y^2 - x + y - 1}{(x-1)^2 + y^2} + i\dfrac{x^2 + y^2 - x - 3y}{(x-1)^2 + y^2}$ donc : $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \dfrac{2x^2 + 2y^2 - x + y - 1}{(x-1)^2 + y^2}$

Et $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \dfrac{x^2 + y^2 - x + 3y}{(x-1)^2 + y^2}$

2) a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = 0$ et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{4} = 0$

Et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

Et $(x;y) \neq (1;0)$

Donc : l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $Z \in \mathbb{R}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ privé du point $A(1)$.

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}\mathrm{e}(z) = 0$ et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - x + y - 1 = 0$

Et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2} = 0$

Et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16} + \left(y + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2} = 0$ Et $(x;y) \neq (1;0)$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$

Alors : l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $Z \in i\mathbb{R}$ est le cercle de centre $K\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ privé du point $A(1)$.

Exercice8 :

Soient a et b deux nombres complexes tels que : $a \neq b$ *et* $|a| = 1$.

Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1 \left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$

Exercice9 :

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ *tels que* $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$

Exercice10 :

Soient a et b deux nombres complexes et $u^2 = ab$.

Montrer que : $|a| + |b| = \left|\dfrac{a+b}{2} + u\right| + \left|\dfrac{a+b}{2} - u\right|$

CORRECTION :

$U^2 = ab$

Montrons que : $|a| + |b| = \left|\dfrac{a+b}{2} + U\right| + \left|\dfrac{a+b}{2} - U\right|$

- *On a :*

$$\left(\left|\frac{a+b}{2}+U\right| + \left|\frac{a+b}{2}-U\right|\right)^2 = \left|\frac{a+b}{2}+U\right|^2 + 2\left|\frac{a+b}{2}+U\right|\left|\frac{a+b}{2}-U\right| + \left|\frac{a+b}{2}-U\right|^2$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}+U\right)\left(\overline{\frac{a+b}{2}+U}\right) + 2\left|\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - U^2\right| + \left(\frac{a+b}{2}-U\right)\left(\overline{\frac{a+b}{2}-U}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}\right) + \frac{a+b}{2}\overline{U} + \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}U + U\overline{U}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2 + a\overline{b} + b\overline{a}\right) + 2|U|^2 + 2\left|\frac{a^2+b^2-2ab}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2 + a\overline{b} + b\overline{a}\right) + 2|a||b| + \frac{1}{2}\left(|a|^2 + a\overline{b} - b\overline{a} + |b|^2\right)$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

$$= \left(|a| + |b|\right)^2$$

Donc : $|a| + |b| = \left|\dfrac{a+b}{2} + U\right| + \left|\dfrac{a+b}{2} - U\right|$

2ème méthode :

On pose : $a = z^2$ *et* $b = z'^2$

Alors : $U^2 = ab == (zz')^2$

Alors : $U = zz'$ *ou* $U = -zz'$

Donc : $\left|\frac{a+b}{2}+U\right|+\left|\frac{a+b}{2}-U\right|=\left|\frac{z^2+z'^2}{2}+zz'\right|+\left|\frac{z^2+z'^2}{2}-zz'\right|$

$$=\left|\frac{(z+z')^2}{2}+z\,z'\right|+\left|\frac{(z-z')^2}{2}-z\,z'\right|$$

$$=\frac{1}{2}|z+z'|^2+\frac{1}{2}|z-z'|^2$$

$$=\frac{1}{2}(z+z')(\overline{z}+\overline{z'})+\frac{1}{2}(z-z')(\overline{z}-\overline{z'})$$

$$=\frac{1}{2}\left(z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z}-z\overline{z'}-z'\overline{z}+z'\overline{z'}\right)\ =|z|^2+|z'|^2$$

$$=|z^2|+|z'^2|$$

$$=|a|+|b|$$

Exercice11 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ .On pose : $z_n=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$

1) Montrer que : $z_n=1\Leftrightarrow(2+i)^n=(2-i)^n$

2) Montrer que : $z_n=1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k(2-i)^k(2i)^{n-k}=-(2i)^n$

CORRECTION :

On pose : $z_n=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$

1) Montrons que : $z_n=1\Leftrightarrow(2+i)^n=(2-i)^n$

On a : $(2+i)^n=(2-i)^n\Leftrightarrow\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^n=1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{(2-i)^2}{4+1}\right)^n=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4-4i-1}{5}\right)^n=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3-4i}{5}\right)^n=1$$

$$\Leftrightarrow z_n=1$$

2) Supposons que : $z_n=1$

Montrons que : $\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k(2-i)^k(2i)^{n-k}=(2i)^n$

On a : $z_n = 1$

Donc : $(2+i)^n = (2-i)^n \left(d'après(1)\right)$

- $\left((2-i)+2i\right)^n = (2-i)^n$
- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k} = (2-i)^n$
  (d'après la formule de binôme de Newton)
- $C_n^0 (2-i)^0 (2i)^n + C_n^n (2-i)^n (2i)^0$
  $+\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k}$
  $= (2-i)^n$
- $(2i)^n + (2-i)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k} = (2-i)^n$

D'où : $\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k} = -(2i)^n$

Exercice12 :

Soit z un nombre complexe.

Montrer que : $|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

CORRECTION

$$
\begin{aligned}
|z-i| = |z+i| &\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow 2iz = 2i\bar{z} \\
&\Leftrightarrow \bar{z} = z \\
&\Leftrightarrow z \in IR
\end{aligned}
$$

Exercice13 :

Soit z un nombre complexe différent de 2 et -2 tel que : $|z| = \sqrt{2}$

Montrer que : $\dfrac{z^2+2}{z^2-2}$ est un nombre imaginaire pur.

CORRECTION

On a : $|z| = \sqrt{2}$

Donc : $|z|^2 = 2$, alors $z\bar{z} = 2$

Montrons que : $\dfrac{z^2+2}{z\;\;-2} \in iIR$

On a : $\dfrac{z^2+2}{z^2-2} = \dfrac{z^2+z\bar{z}}{z^2-z\bar{z}}$

$$= \frac{\cancel{z}\left(z+\bar{z}\right)}{\cancel{z}\left(z-\bar{z}\right)}$$

$$= \frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}$$

$$\frac{z^2+2}{z^2-2} = \frac{\cancel{2}\mathscr{R}\mathrm{e}(z)}{\cancel{2}i\mathscr{I}m(z)}$$

$$= -i\frac{\mathscr{R}\mathrm{e}(z)}{\mathscr{I}m(z)} \in i\mathbb{R}$$

<u>$2^{ème}$ méthode :</u>

On a : $\overline{\left(\dfrac{z^2+2}{z^2-2}\right)} = \dfrac{\bar{z}^2+2}{\bar{z}^2-2} = \dfrac{z^2\left(\bar{z}^2+2\right)}{z^2\left(\bar{z}^2-2\right)}$

$$= \frac{\left(z\bar{z}\right)^2+2z^2}{\left(z\bar{z}\right)^2-2z^2}$$

$$= \frac{|z|^4+2z^2}{|z|^4-2z^2} = -\frac{z^2+2}{z^2-2}$$

Alors : $\dfrac{z^2+2}{z^2-2} \in i\mathbb{R}$

<u>Exercice14 :</u>

Soit z un nombre complexe tel que : $|z| = |z-1|$

Montrer que $\arg(z)+\arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

<u>Exercice15 :</u>

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}+2i \quad , \quad z_2 = \left(\sqrt{3}-i\right)(1+i) \quad , \quad z_3 = \frac{-\sqrt{3}-3i}{1+i\sqrt{3}}$$

$$z_4 = 1+\cos\theta + i\sin\theta \ \text{ où } \theta \in \left]0,\pi\right[$$

<u>CORRECTION</u>

► $z_1 = 2\sqrt{3}+2i$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

► $z_2 = \left(\sqrt{3} - i\right)(1 + i)$

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

► $z_3 = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{1 + i\sqrt{3}}$

$$\left|-\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$$

Donc : $-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc : $z_3 = \dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\pi}$

Donc : $z_3 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$

► $z_4 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$

$$z_4 = 1+e^{i\theta}\left(e^{-\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

On a : $0<\theta<\pi$, donc :$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$

Alors : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$

Donc : $z_4 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Exercice16 :

On pose : $a=1-i$, $b=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $u=\frac{a}{b}$

1) Ecrire u sous forme algébrique.
2) Écrire u sous forme trigonométrique.

En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

CORRECTION

$a=1-i$;$b=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $u=\frac{a}{b}$

1) $u=\frac{a}{b}=\frac{2(1-i)}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

$$=\frac{\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{3}+i)}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

2) on a : $a=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$b=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc : $u=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$u=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

3) on a : $\begin{cases} u=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \\ u=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

Donc : $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ Et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice17 :

Soit z un nombre complexe tel que : $R_e(z)\neq 1$

Dans le plan complexe , on considère les points A, B , M et M' d'affixes respectives $1, -1, z$ et z' tel que $z'=\frac{z-1}{1-\overline{z}}$

1) Vérifier que $M\neq A$, $M'\neq A$, $M'\neq B$.

2) a-Montrer que $|z'|=1$

b- Montrer que $\frac{z'-1}{z-1}\in\mathbb{R}$ et $\frac{z'+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$

3) En déduire que une construction du point M' à partir du point M .

Exercice18 :

Dans le plan complexe, on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives :

$-2+i$, $3-4i$, $3+i$ et $1+2i$

Montrer que les ponts A, B , C et D sont cocycliques .

Exercice19 :

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$z_1=2i$, $z_2=3+4i$, $z_3=-5+12i$, $z_4=1-i$

Exercice20 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2-\left(\sqrt{3}-i\right)z-2+2i\sqrt{3}=0 \quad , \quad (2+i)z^2+(1-7i)z-5=0$$

Exercice21 :

1) Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants : $-i$, $1-i$

2) En déduire les solutions de l'équation : $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

CORRECTION

1) $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : les racines cubiques de –i sont :

$z_k=e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}$ tel que : $k\in\{0;1;2\}$

$z_0=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc : les racines cubiques de 1-i sont : $z'_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0;1;2\}$

$z'_0=\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z'_1=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z'_2=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2) soit l'équation : $(E)\ :z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

On pose : $Z=z^3$

Alors (E) devient : $Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$

$\Delta=(2i-1)^2+4(1+i)$

$=-4-4i+1+4+4i$

$=1$

Donc : $Z_1=\frac{1-2i-1}{2}=-i$ $\qquad Z_2=\frac{1-2i+1}{2}=1-i$

Donc : $(E)\Leftrightarrow z^3=-i$ ou $z^3=1-i$

Et d'après (1), on déduit que : $S=\{z_0;z_1;z_2;z'_0;z'_1;z'_2\}$

Exercice22 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F qui associe à point M(z) du

plan , le point M'(z') dans chacun des cas suivants :

1) $z' = z + i$ 2) $z' = 2z + 1 - 3i$ 3) $z' = -iz + 2 - i$ 4) $z' = -z + 2i$

Exercice23 :

Soit R la rotation de centre $\Omega(2-i)$ *et qui transforme le point* $A(3+i)$ *au point* $B(4-2i)$.

1) *Déterminer l'angle de la rotation R , puis déduire l'écriture complexe de la rotation R*
2) a-*Déterminer l'affixe du point D image du point* $C(1-4i)$ *par la rotation R.*

   b- *Montrer que les droites* (AC) *et* (BD) *sont perpendiculaires.*

Exercice24 :

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) *Déterminer la nature de la transformation R du plan d'écriture complexe :* $z' = -iz + 4i$
2) *Déterminer l'écriture et la nature de la transformation* $R \circ T$ *où T est la translation de vecteur* $\vec{u}$.

Niveau 2

Exercice25 :

Ecrire le nombre complexe $z = 1 - \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$ *sous forme exponentielle. En déduire* $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

Exercice26 :

1) *Montrer que :* $(\forall a \in \mathbb{R}) : \arg(1+ia) \equiv \arctan(a)[2\pi]$

2) *Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :* $z = 1 + 2i$ *et* $z' = -3 + 4i$

3) Vérifier que : $z^2 = z'$ puis en déduire que : $2\arctan 2 + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$

__Exercice27 :__

Soient $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soient les sommes suivantes :

$S_n = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta$ et $S_n' = \sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta$

1) Calculer $S_n + iS_n'$

2) Déterminer S_n et S_n' en fonction de n et θ

__Exercice28 :__

Dans le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, On considère les points A, B et C et D d'affixes respectives

$a = 1 + 2i$, $b = 1 + \sqrt{3} + i$, $c = 1 + \sqrt{3} - i$, $d = 1 - 2i$.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$.

2) a- Montrer que : $\frac{b-d}{b-a} = i\sqrt{3}$

b- En déduire la nature du triangle ABC.

3) Montrer que les points appartiennent à un même cercle dont on déterminera son centre et son rayon.

__Exercice29 :__

Dans le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, On considère les points A, B , C et D d'affixes respectives $a = -\sqrt{2}$, $b = 1 + i$, $c = 1 - i$.

1) a- Ecrire $\frac{b-a}{c-a}$ sous forme algébrique. .

b- Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$.

2) a-Montrer que la droite (AO) est médiatrice du segment $[BC]$.

b- En déduire que : $\left(\overline{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

3) a- Ecrire $\frac{b-a}{c-a}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

b- En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

<u>Exercice30 :</u>

Dans le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, On considère les points A, B et

C d'affixes respectives $a = i\sqrt{3}$, $b = 1 - i\sqrt{3}$, $c = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

1) Vérifier que : $\arg\left(\frac{c}{b}\right) \equiv \arg\left(\frac{a}{c}\right)\ [2\pi]$

2) Montrer que $\left[\mathrm{OC}\right)$ est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

<u>Exercice31 :</u>

1) On pose $P(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i$

2) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur α .

3) a-Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = \left(z-\alpha\right)\left(a z^2 + b z + c\right)$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\mathrm{E}\right)$

4) On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .
Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

<u>Exercice32 :</u>

On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$,$S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1) Montrer que : $\overline{S} = T$ et $\mathrm{Im}\left(S > 0\right)$

2) a-Montrer que : $S + T = -1$ et $S \times T = 2$

b-Déterminer S et T .

c- En déduire la valeur de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Exercice33 :

On pose : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère dans le plan complexe trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Vérifier que : $1+j+j^2=0$ et $j^3=1$

2) Montrer que l'expression complexe de la rotation r est : $z'=-j^2z-jc$

3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a+bj+cj^2=0$ ou $a+bj^2+cj=0$

4) En déduire que : le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$

Exercice34 :

Soit $a\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$

1) a-Vérifier que $u=a+i$ est solution de l'équation :

$$(E): z^2-(1+a)(1+i)z+\left(1+a^2\right)i=0$$

b-Déterminer la deuxième solution v de l'équation (E)

2) On suppose que : $|a|=1$

a-Montrer que : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$

b-Vérifier que : $u^2=a\left[\left(a-\overline{a}\right)+2i\right]$, puis en déduire que :

$$\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$$

3) Montrer que : $|u|+|v|\geq 2$

Exercice35 :

1) a-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+4z+1+i(3z+5)=0$

b- En déduire les solutions de l'équation $(F): (z^2+4z+1)^2+(3z+5)^2=0$

3) Déterminer les réels a, b, c et d vérifiant :

$$(\forall z\in\mathbb{C}): (z^2+4z+1)^2+(3z+5)^2=(z^2+az+b)(z^2+cz+d)$$

Exercice36 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit $m\in\mathbb{C}^*$ et soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$

1) Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta=(m+2i)^2$,puis déterminer les solutions de l'équation

(E) sous forme algébrique

2) Dans cette question on prend $m=1+i$ et on note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $|z_1|<|z_2|$

a-Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

b-Vérifier que : $(-z_1)^3=z_2$,puis déduire les deux autres racines cubiques de z_2 .

3) Dans cette question on suppose que $m\notin i\mathbb{R}$.

On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ avec : $a=i$,$b=2m$ et $c=m-2i$

a-Montrer que : $\left(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}i\right\}\right): \quad \frac{z-3i}{2z-i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$

b- En déduire que les points A ,B et C ne sont pas alignés

c- À l'extérieur du triangle ABC , on construit le triangle BCD isocèle et rectangle en $D(d)$

Montrer que : $d = \dfrac{3m + im - 2 - 2i}{2}$ ou $d = \dfrac{3m - im + 2 - 2i}{2}$

d- Déterminer m pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice37 :

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit f l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} z + 1 - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2.On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.

On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.

a- Montrer que : $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b- Montrer que pour tout $n \in IN$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c- En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A , M_0 et M_n sont alignés.

Exercice38 :

1) Résoudre dans l'équation $(E) : 5z^2 - (7+9i)z + 4 + 3i = 0$

2) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tels que $\mathfrak{I}m(z_1) < 0$, et soient $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

Montrer que le triangle OAB est rectangle.

3)Soit θ un argument du nombre complexe $4+3i$. Montrer que $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice39

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M´ d'affixe z´ telle que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1) Montrer que les points O, M et M´ sont alignés.

2) Démontrer que : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On désigne par (C) le cercle de centre A contenant le point O et par (C^*) le cercle (C) privé du point O.

3) On suppose dans cette question que le point M appartient à (C^*).

a-Démontrer que: $|z-1| = 1$ et que $|z'+1| = |z'|$.

Interpréter géométriquement ces égalités.

b- Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M´ à partir du point M.

4) Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

a- Calculer $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\bar{z}$.

b- Démontrer que les points A, B, M et M´ sont cocycliques.

Exercice40 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} z_k$, $b_n = \prod_{k=1-n}^{k=-1} z_k$

avec $z_k = i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ $(1-n \le k \le n-1 \; et \; k \ne 0)$

a-Montrer que : $b_n = \dfrac{1}{a_n}$

b- On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} z_k \times \prod_{k=n+1}^{k=2n-1} z_k$

Montrer que : $P_n = 1$

Exercice 41:

I. Considérons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation

(E): $z^3 - (i+2a)z^2 + (1+2ia+a^2)z - i(1+a^2) = 0$ tel que : $a \in \mathbb{C}$

1. Vérifier que le nombre i est une solution de l'équation (E)
2. Déduire que les deux autres solutions de l'équation (E) sont : $z_1 = a-i$ et $z_2 = a+i$
3. Montrer que : $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer l'ensemble des points $N(a)$ tel que : $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$
5. Supposons que : $a = e^{i\theta}$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

II. On pose : $a = \sqrt{3} - 2i$

Considérons dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère ABOC soit un losange.
3. Considérons l'application F qui à tous point $M(z)$ dans le plan complexe est associé le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)z$

   a. Montrer que F est la composée commutative d'une rotation r et d'une homothétie h et déterminer leurs éléments caractéristiques.

   b. Vérifier que : $F(A) = B$

   c. Déduire que: $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 42:

I) Soit m un complexe différent de 1 ; i et $-i$.

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) : $z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$.

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) s'écrit : $\Delta = \left((1+i)(m-1)\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Sachant que $m = e^{i\alpha}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; déterminer la forme trigonométrique des solutions de l'équation (E).

II) le plan (P) est rapport à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points : $A(i)$; $B(-i)$; $M(m)$; $M_1(z_1 = 1 - im)$ et $M_2(z_2 = m - i)$

1) Montrer que : $\frac{iz_1}{z_2} = \frac{|m|^2 - 1 + i(m + \overline{m})}{|m - i|^2}$ et déduire l'ensemble de points $M(m)$; tel que O ; M_1 et M_2 soient alignés.

2) Montrer que : $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = m(1 - i) + i$ et déterminer l'ensemble de points $M(m)$ tel que le triangle MM_1M_2 soit rectangle en M.

3) a) Montrer que : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1$

b) Montrer que M_1 est l'image de M par la rotation R de centre $\Omega\left(\omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

c) Déterminer l'ensemble de points $M(m)$ pour que Ω ; M ; M_1 et M_2 soient cocycliques.