

1) Calculs de base

1.1- les tractions

Soient $a ; b ; c$ et d quatre nombres réels
tels que : $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\bullet \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\bullet \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\bullet \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\bullet \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

$$\bullet \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$\bullet \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \neq \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

1.2- Développement et factorisation

Solent a, b et k trois réels :

$$\bullet k(a + b) = ka + kb$$

$$\bullet k(a - b) = ka - kb$$

1.3- Puissances

Soient a un réel et n un entier naturel
($n \in \mathbb{N}$)

$$\bullet a^0 = 1$$

$$\bullet a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad (\text{pour } n \neq 0)$$

$$\bullet a^n = a \times a^{n-1}$$

$$\bullet a^{n+p} = a^n \times a^p$$

$$\bullet a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\bullet a^{n-p} = \frac{a^n}{a^p}$$

$$\bullet (a^n)^p = a^{n \times p}$$

1.4- Identités remarquables :

Solent a et b deux réels.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\bullet a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Factoriser les expressions :

$$A = x^2 + 3x - 4$$

$$B = x^3 - 8 + (x-2)(2x+1)$$

Simplifier :

$$A = \frac{2^5 \times 16^{-3}}{8^{-4} \times 32^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(3^3)^{-2} \times 9^5}{27^3}$$

Simplifier :

$$A = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$B = \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^3 - 1}$$

Factoriser :

$$A = a^4 - b^4$$

1.5- La racine Carrée :

Soient a et b deux réels positifs

- $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions
 $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- Soit c un réel quelconque : $\sqrt{c^2} = |c|$
- Le conjugué de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ est $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

• Le conjugué de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

• Le conjugué de
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

Exemples

$$\sqrt{x(2x+3)} \neq \sqrt{x}\sqrt{2x+3} \quad \text{sauf si} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}} \neq \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}} \quad \text{sauf si} \quad \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

Rendre le dénominateur rationnel

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{5}}$$

$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degrés $n-1$.

• Si $P(\alpha) = 0$; on dit que α est une racine du polynôme P et on a :

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) ;$$

2) polynôme

Un polynôme s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

• Si $P(x)$ est un polynôme de degrés n alors pour tout réel α on a :

on dit que $P(x)$ est divisible par : $(x - \alpha)$

● **Division Euclidienne :**

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 & x - 2 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} & \\
 7x^2 - 4x + 2 & \\
 \underline{7x^2 - 14x} & \\
 10x + 2 & \\
 \underline{10x - 20} & \\
 22 &
 \end{array}$$

Si $a_n \neq 0$ l'entier n s'appelle le degré du polynôme.

Dans cette D.E ; il faut vérifier que :

$$P(2) = 22$$

Effectuer la division euclidienne de

$P(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 4$ par $(x + 1)$; puis factoriser $P(x)$.

Simplifier

$\frac{5x^3 - x^2 + 2x - 6}{2x^2 + 3x - 5}$ (On remarque que 1 est une racine du polynôme du numérateur et du polynôme du dénominateur)

3) L'ordre dans IR

- $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- Si $a \leq b$ et $k \geq 0$ alors : $ka \leq kb$
- Si $a \leq b$ et $k \leq 0$ alors : $ka \geq kb$
- Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ alors : $a + c \leq b + d$
- Si $\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases}$ alors : $ac \leq bd$
- Si $0 \leq a \leq x \leq b$ alors : $0 \leq a^2 \leq x^2 \leq b^2$
- Si $a \leq x \leq b \leq 0$ alors : $b^2 \leq x^2 \leq a^2$

4) la valeur absolue

- $|x| = x$ si $x \geq 0$
- $|x| = -x$ si $x \leq 0$
- Si $A(x) \geq 0$ alors $|A(x)| = A(x)$
- Si $A(x) \leq 0$ alors $|A(x)| = -A(x)$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $|x^n| = |x|^n$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

5) Les intervalles

- $x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$
- $x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b$

$$\begin{aligned}
 -5 \leq x \leq 2 & \text{ alors } 0 \leq x^2 \leq 25 \\
 -5 \leq x \leq 7 & \text{ alors } 0 \leq x^2 \leq 49
 \end{aligned}$$

On ne fait jamais la différence ou le quotient membre à membre

Soit $a \in [-2; 1]$ et $b \in [-5; 7]$;

Encadrer : $A = ab + a - b$ et

$$B = \frac{ab + b}{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 |x + y| & \neq |x| + |y| \\
 |x + y| & \leq |x| + |y| \\
 |x - y| & \leq |x| + |y|
 \end{aligned}$$

Déterminer

$$\begin{aligned}
 &]-2; 3[\cup [0; 5[\\
 & [-7; 2] \cap]-1; 3]
 \end{aligned}$$

- $x \in [a; b[\Leftrightarrow a \leq x < b$
- $x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b$
- $x \in [a; +\infty[\Leftrightarrow x \geq a$
- $x \in]-\infty; b[\Leftrightarrow x < b$
- Si $r \geq 0$ alors $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r; r]$
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$

Résoudre

$$|3x+1| \leq 2$$

Ecrire sans valeur absolue sur des intervalles de $\mathbb{R}$
l'expression :

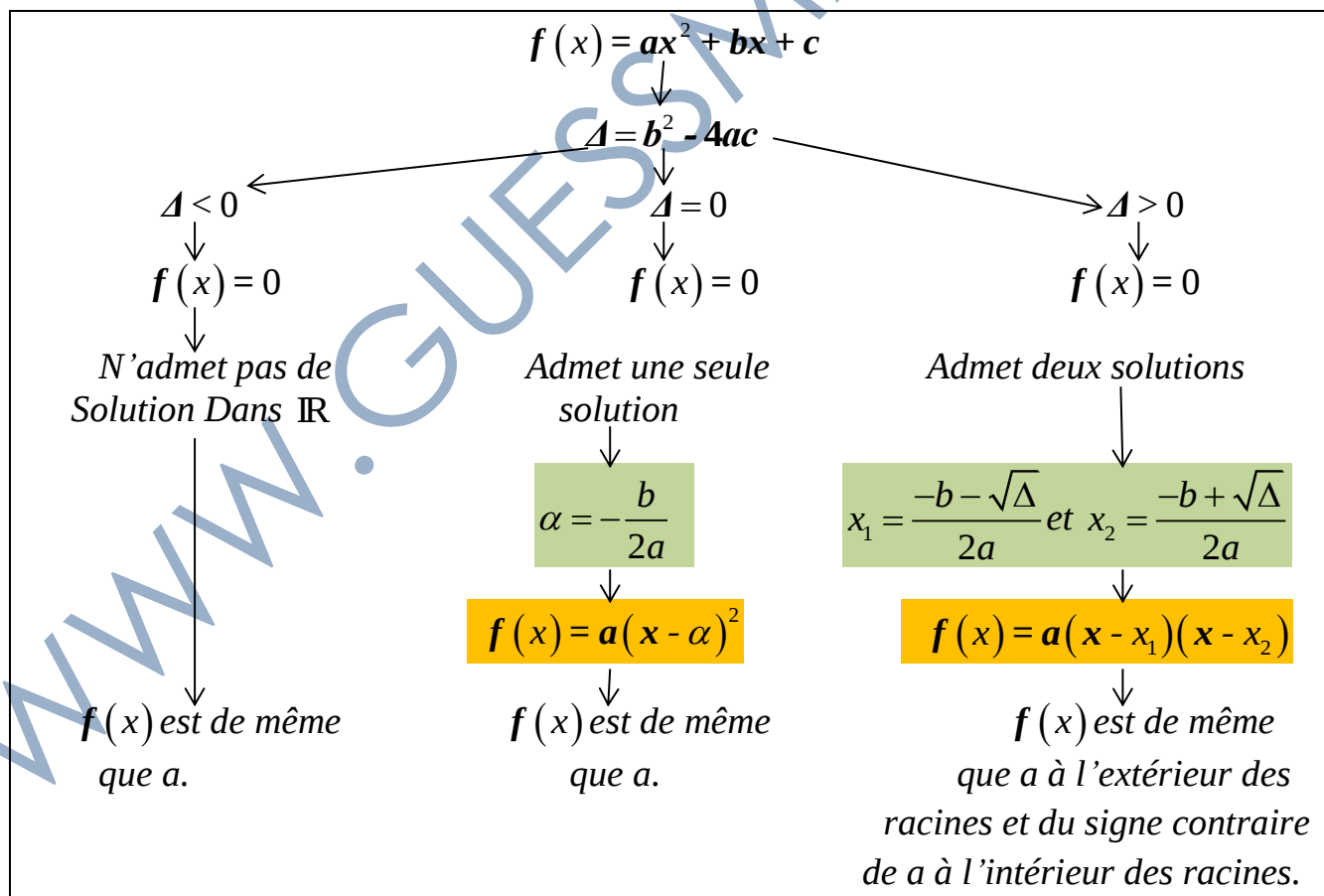
$$A = |1-x| - 2|3x+6|$$

6) Signe de $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

7) Le trinôme $ax^2 + bx + c$

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ c'est la forme canonique de f où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.



8) Les équations et les inéquations dans $\mathbb{R}$.

- $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = B(x) \text{ ou } A(x) = -B(x)$

- $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow B(x) \geq 0 \text{ et } \left(\text{ou } \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases} \right)$
- $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$
- $\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$
- $|A(x)| \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ -B(x) \leq A(x) \leq B(x) \end{cases}$
- $|A(x)| \geq B(x) \Leftrightarrow \text{ou } \begin{cases} B(x) \leq 0 \\ B(x) \geq 0 \text{ et } (A(x) \geq B(x) \text{ ou } A(x) \leq -B(x)) \end{cases}$
- $|A(x)| \leq |B(x)| \Leftrightarrow \text{ou } \begin{cases} B(x) \leq 0 \text{ et } (B(x) \leq A(x) \leq -B(x)) \\ B(x) \geq 0 \text{ et } (-B(x) \leq A(x) \leq B(x)) \end{cases}$
- $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B(x) \end{cases}$
- $\sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x) \end{cases}$
- $\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \text{ou } \begin{cases} B(x) \leq 0 \\ A(x) \geq 0 \text{ et } B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B^2(x) \end{cases}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|2x^2 + 2x + 1| \leq 5$
2. $|2x + 1| \geq |x^2 + x + 1|$
3. $|x^2 + x + 2| \geq x - 1$
4. $|x^2 + x + 2| \leq 4x - 1$
5. $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq x + 1$
6. $\sqrt{x^2 + x - 2} \leq 5x + 1$