# *LIMITES ET ASYMPTOTES*

*Chapitre II*

## 1. *Comment retenir les limites des fonctions de reférence*

**Méthode**

*Inutile de les apprendre par coeur. Il suffit de comprendre.*

*Pour cela, garder en tête que $\lim\limits_{x \to !} f(x)$ est le nombre vers lequel se rapproche $f(x)$ lorsque x se rapproche de ! .*

**Exemple**

*Donner les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$*

**Solution**

■ *On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. En effet, si x prend des valeurs de plus en phus grandes(qui tendent vers $+\infty$) par exemple 10 ;100 ;10000 ;1000000 ; alors $\frac{1}{x}$ vaut tour à tour 0,1 ; 0,01 ; 0,0001 ; 0,000001. D'où plus x grandi, plus $\frac{1}{x}$ se rapproche de0.*

■ *On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ . Pour le voir, il suffit d'imaginer x qui tend vers $+\infty$, prenant pour x successivement les valeurs 4 ;9 ;16 ;100 ;10000.. alors $\sqrt{x}$ prendra les valeurs 2 ;3 ;4 ; 10 ;100, .. Donc plus x devient grand, plus $\sqrt{x}$ grandi.*

■ *Pour terminer, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ . Ici, si x prend pour valeurs respectivement -10 ;-100 ;-1000 ;-10000, on constate que $x^3$ lui prend respectivement les valeurs -1000 ;-100000000…….*
*Donc plus x devient grand négativement, plus $x^3$ grandi aussi négativement.*

## 2. *Comment lire graphiquement* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

**Méthode**

*On prend x de plus en plus proche de a et on regarde vers quelle valeur $f(x)$ se rapproche*

## 3. *Comment calculer une limite* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

**Méthode 1**

*On remplace tous les x par adans l'expression de la limite à calculer.*

**Exemple**

*Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x+6\right)$ .*

***Solution***

*On a :* $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x+6\right)=0^2+3\times 0+6=6$

**Méthode 2**

*Si f est ume fonction polynome et si* $x\to\infty$ *, alors on calcule la limite de son terme de plus haut degré .*

***Exemple***

*Calculer* $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+3x+6\right)$.

***Solution***

*On cherche la mite d'un polynômes en* $-\infty$ *. Il suffit de calculer celle de son terme de plus haut degre. On a donc :* $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+3x+6\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2\right)=+\infty$

*Autre méthode (On peut factoriser par la puissansse de x la plus grande) ;ce qui est plus long :*

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^2+3x+6\right)=\lim_{x\to -\infty}x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=+\infty$$

*(Car* $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{6}{x^2}=0$

**Méthode 3**

*Si f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) et si* $x\to\infty$*, alors on calcule la limite du quotient des termes de plus haut degre (On peut factoriser par la puissansse de x la plus grande au*

**Méthode 4**

*En présence de* $\sqrt{x}$ *et de* $x^n$ *, lorsque x tend vers* $x\to\infty$ *,on factorise.*

***Exemple***

*Calculer les limites suivantes : a)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^3-x^2+3\sqrt{x}-1\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{5x^2-x+4\sqrt{x}-2}\right)$

***Solution***

*a) Ona :* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^3-x^2+3\sqrt{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^3\left(-4-\frac{1}{x}+3\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)$

*Or* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}=0$

*On en deduit que :* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4-\frac{1}{x}+3\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)=-4$

*on obtient finalement* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^3-x^2+3\sqrt{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^3\left(-4-\frac{1}{x}+3\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)=-4\times+\infty=-\infty$

$$b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{5x^2-x+4\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-2\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{1}{x}+4\frac{\sqrt{x}}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - 2\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(5 - \frac{1}{x} + 4\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

*Or :* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}} = 0$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

*On en déduit que* $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - 2\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \left(5 - \frac{1}{x} + 4\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) = 5$

*Par suite :* $\lim_{x \to +\infty} x\left(5 - \frac{1}{x} + 4\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

*Ce qui permet de conclure que :* $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{5x^2 - x + 4\sqrt{x} - 2}\right) = 0$

***Méthode 5***

*En présence de racines carries, si x tend vers l'infini et que l'on débouche sur la forme indeterminée* $"\infty - \infty"$ *, alors on utilise la méthode du conjugué en multiplant et divisant par l'expression conjuguée*

***Exemple***

*Soit* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$ *et* $g(x) = \sqrt{x^2 - 2} - x + 1$ *Calculer les limites suivantes:*

*a)* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *b)* $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

***Solution***

*a) On a :* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

*Comme* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x = +\infty$

*on peut conclure que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

*b) pour* $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ *on procède de la meme façon en choisissons convenablement le a et le b dans le prduit des conjuguées* $(a - b)(a + b)$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2} - x + 1$$

$$= \underbrace{\sqrt{x^2 - 2}}_{a} - \underbrace{(x - 1)}_{b}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2} - (x - 1)\right)\left(\sqrt{x^2 - 2} + (x - 1)\right)}{\sqrt{x^2 - 2} + (x - 1)}$$

$$= \frac{x^2-2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2}+(x-1)}$$
$$= \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x-3}{\sqrt{x^2-2}+(x-1)}$$
$$= \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2}+(x-1)}$$

*En essayons de calculer la limite de $g(x)$ sous cette forme on trouve toujours une forme indéterminée ; alors il faut en plus transformer l'expression en factorisant le numérateur et le dénominateur par x puis simplifier. On obtient :* $g(x) = \dfrac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

*Donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 1$ *(car :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x} = 2$ *et*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{2}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right) = 2$*)*

***Remarque :***

*Quand on factorise par $x^2$ à l'intérieure d'une racine carrée ( $\sqrt{ax^2-b}$ ) au voisinage de l'infinie on fait apparaitre $|x|$ à l'extérieure de la racine ( $|x|\sqrt{a-\frac{b}{x^2}}$ ) et suivant le voisinage $+\infty$ ou $-\infty$ on obtient respectivement $x$ ou $-x$ .*

***Méthode 6***

*Si la fonction est un quotient qui, pour x tendant vers un réel a. donne la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" alors on utilise la définition d'un nombre dérive.*

***Exemple***

*Calculer* *a)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x+3}$ *c)* $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

***Solution***

*On va mettre les limites à calculer sous la forme* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

*Alors si la fonction f est dérivable en a cette limite est égale au nombre dérivé en a .*

*a) Soit f la fonction définie sur IR par :* $f(x) = \sin x$ *; f est dérivable en* $0$ *; et*

$f'(0) = (\sin)'(0) = \cos 0 = 1$

Comme $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

*Alors* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = f'(0) = 1$

b) *Soit f la fonction définie sur IR par :* $f(x)=\sqrt{x^2-5}$ *; f est dérivable en* $-3$ *; et*

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-5}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \text{ ; donc } f'(-3)=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2-5}}=-\frac{3}{2}$$

*Comme* $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$

*Alors* $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x+3}=f'(-3)=-\frac{3}{2}$

c) *Soit f la fonction définie sur IR par :* $f(x)=\sqrt{x+8}$ *; f est dérivable en* $1$ *; et*

$$f'(x)=\left(\sqrt{x+8}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x+8}} \text{ ; donc } f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+8}}=\frac{1}{3}$$

*Comme* $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

*Alors* $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+8}-2}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{3}$

***Méthode 7***

*Si f est la composée de deux fonctions* $(f=u\circ v)$ *alors:*

- *On calcule* $\lim\limits_{x\to a}v(x)=b$
- *Ensuite* $\lim\limits_{X\to b}u(X)=c$
- *On conclut, d'après le théorème sur la limite de composes de fonctions, que :* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$.

***Exemple***

*Calculer a)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1+x-3\pi x^2}{2x^2}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}\right)$ *c)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\sqrt{\frac{\pi(x^2-1)}{x^2}}\right)$

***Solution***

*On cherche des limites de composées de fonctions*

*a) Pour* $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1+x-3\pi x^2}{2x^2}\right)$

*On procède comme suit:*

*D'une part* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x-3\pi x^2}{2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3\pi \cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\frac{-3\pi}{2}$

*D'autre part :* $\lim\limits_{x\to-\frac{3\pi}{2}}\cos(X)=\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Car la fonction* $x\mapsto\cos x$ *est continue en* $-\frac{3\pi}{2}$ *)*

*On conclut que* $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{1+x-3\pi x^2}{2x^2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

*b) Pour* $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}\right)$

*On procède comme suit:*

*D'une part* $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0$

*D'autre part :* $\lim\limits_{X\to 0^+}\left(\sqrt{X}\right)=0$

*On conclut que* $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}\right)=0$

***Méthode 8***

*Si l'on peut obtenir un encadrement de f au voisinage de a, c'est-à-dire* $g(x)\le f(x)\le h(x)$ *pour tout x proche de a et si* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ *, alors on applique le théorème des gendarmes:* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

***Exemple***

*Calculer : a)* $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{\cos t}{t}$ *b)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-5x-\sin(2x)}{1+x}$

***Solution***

¬ *Pour* $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{\cos t}{t}$ *on constate que* $\lim\limits_{t\to +\infty}\cos t$ *n'existe pas. L'approche direct ne fonctionne donc pas. Il va falloir s'y prendre autrement.*

*Tout d'abord, on a :* $-1<\cos t<1$ *pour tout* $t>0$ *donc :* $-\dfrac{1}{t}<\dfrac{\cos t}{t}<\dfrac{1}{t}$

*D'autre part,* $\lim\limits_{t\to +\infty}-\dfrac{1}{t}=\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{1}{t}=0$

*D'après le théorème des gendarmes, on a :* $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{\cos t}{t}=0$

¬ *Pour* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-5x-\sin(2x)}{1+x}$

*Aussi, on remarque que* $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin(2x)$ *n'existe pas*

*Procédons à un encadrement pas à pas de* $\dfrac{-5x-\sin(2x)}{1+x}$

$-1\le\sin(2x)\le 1$ *pour tout* $x\in IR-\{-1\}$ *; D'où*

$-1\le -\sin(2x)\le 1 \Rightarrow -5x-1\le -5x-\sin(2x)\le 1-5x$ *, pour tout* $x\in IR-\{-1\}$ *et*

$\dfrac{1-5x}{x+1}\le\dfrac{-5x-\sin(2x)}{x+1}\le\dfrac{-1-5x}{x+1}$ *car au voisinage de* $-\infty$ $(x+1)$ *est strictement négative.*

*Comme* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-5x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-1-5x}{x+1}=-5$

*D'après le théorème des gendarmes, on a :* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-5x-\sin(2x)}{1+x}=-5$

**Méthode 9**

*Si l'on a* $f(x) \geq g(x)$ *pour tout* $x$ *proche de* $a$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ *, alors on conclut que* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

*De même si* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x$ *proche de* $a$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ *,alors on conclut que* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

**Exemple**

*Soit* $f(x) = \dfrac{\cos x}{x} + 2x$ .

*Montrer que :* $f(x) \leq 2x - \dfrac{1}{x}$ *pour tout* $x < 0$ *, puis en déduire* $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

**Solution**

*Procédons par équivalence*

*Pour* $x < 0$ *, on a :* $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq -\dfrac{1}{x}$ *(x est négative donc l'inégalité change d'ordre en divisons par x)*

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x} \leq \underbrace{\frac{\cos x}{x} + 2x \leq 2x - \frac{1}{x}}_{\text{l'inégalité qui nous interresse}}$$

*Comme* $\lim_{x\to -\infty} 2x - \dfrac{1}{x} = -\infty$

*On peut donc conclure, grâce au théorème de comparaison, que* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

## 4. comment interpréter graphiquement une limite

**Méthode**

*On l'interprète en terme d'asymptote*

- *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *ou* $a \in IR$ *, alors on conclut que :* $C_f$ *admet une asymptote verticale d'équation* $x = a$
- *Si* $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$ *, ou* $b \in IR$ *, alors on conclut que :* $C_f$ *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = b$ *au voisinage de* $\mp\infty$ .
- *Si* $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) - y = 0$ *avec* $y = ax + b$ *, alors* $C_f$ *admet une asymptote oblique d'équation* $y = ax + b$ *au voisinage de* $\mp\infty$ .

**Exemple**

*Calculer les limites suivantes et donnez-en une interprétation graphique:*

*a)* $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x + 5 - x^2}{2 + x}$ *b)* $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^2 + 5}{-1 + 5x - x^2}$ *c)* $\lim_{x\to +\infty} f(x) + (4x + 1)$ *où* $f(x) = -\dfrac{4x^2 + 9x + 5}{x + 2}$ .

***Solution***

*a) Pour* $\lim_{x\to -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x}$ *; On a :* $\lim_{x\to -2^-} x+5-x^2 = -1$ *(car le polynôme* $x+5-x^2$ *est continue en -2).*

*Et* $\lim_{x\to -2^-} 2+x = 0^-$ *(car* $x<-2$ *).*

*Donc en appliquant les règles de quotient des limites ; on obtient :* $\lim_{x\to -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x} = +\infty$.

***Interprétation géométrique*** *:*

$C_f$ *admet* $-\infty$ *la droite d'équation* $x=-2$ *comme asymptote verticale.*

*b) Pour* $\lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}$

*En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient :* $\lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}} = 4$

***Interprétation géométrique*** *:*

$C_f$ *admet au voisinage de* $-\infty$ *la droite d'équation* $y=4$ *comme asymptote horizontale.*

*c)* $\lim_{x\to +\infty} f(x)+(4x+1)$ *où* $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2}$

*pour calculer cette limite il suffit de trouver une expression simplifier de*

$f(x)+(4x+1) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2}+(4x+1)$

*On peut d'abord montrer que :* $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2} = -(4x+1)-\frac{3}{x+2}$ *par une division euclidienne de* $4x^2+9x+5$ *par* $x+2$ *; on obtient :*

$f(x)+(4x+1) = -\cancel{(4x+1)}-\frac{3}{x+2}+\cancel{(4x+1)} = -\frac{3}{x+2}$ *et* $\lim_{x\to +\infty} -\frac{3}{x+2} = 0$

*Donc :* $\lim_{x\to +\infty} f(x)+(4x+1) = 0$.

***Interprétation géométrique*** *:*

$C_f$ *admet une asymptote oblique d'équation* $y=-(4x+1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

## *5. **Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote verticale***

***Méthode***

*On choisit une valeur interdite* $a \in IR$ *de f (càd une valeur où f n'est pas définie) et on calcule* $\lim_{x\to a} f(x)$ *pour trouver* $+\infty$ *ou* $-\infty$. *Dans la plus part des cas cette limite se calculera à droite et à gauche de a .*

*On conclut que la droite d'equation* $x=a$ *est une asymptote verticale à* $C_f$ *.*

***Exemple***

*Soit la fonction f definie sur* $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x}$

*Montrer que f admet une une asymptote verticale dont on précisera une éequation.*

***Solution***

*Comme 4 annule le denominateur de $f(x)$, on n'hésite pas : on calcule lim f(x)*

*On a :* $\lim_{x\to 4} x^2+x-6=14$ *et* $\lim_{x\to 4} 4-x=0$ . *Donc* $\lim_{x\to 4} f(x)=\pm\infty$ *(celon si cette limite est à droite ou à gauche de 4.*

***Interprétation géométrique*** :

*Des deux deniers résultats, on déduit que la droite d'equation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.*

## 6. *Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote horizontale*

***Méthode***

*On calcule* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *pour trouver un réel b.*

*On conclut alors que la droite équation $y=b$ est une asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de $-\infty$ ou au voisinage de $+\infty$.*

***Exemple***

*Soit* $f: x \mapsto \dfrac{2+x-x^2}{3x^2+7}$ *définie sur IR.*

*Montrer que $C_f$ la courbe représentative de f, admet en $-\infty$ une asymptote dont on précisera une équation.*

***Solution***

*En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient :* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2+x-x^2}{3x^2+7}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}=-\dfrac{1}{3}$

*On peut donc conclure que $C_f$ admet une asymptote verticale en $-\infty$ d'équation* $y=-\dfrac{1}{3}$ .

## 7. *Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique*

***Méthode***

*On trouve* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

*On montre que* $\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=0$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$ *avec* $y=ax+b$

*On conclut alors que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à $C_f$ au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.*

***Exemple***

*Soit f la fonction définie sur* $IR-\{1\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x^2-6x+5}{x-1}$

*a) Déterminer les réels a, b et c tels que* $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ .

*b) En déduire que la courbe représentative $C_f$ de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.*

***Solution***

*a) Pour tout* $x \neq 1$ *, on a :* $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}$

$$=\frac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1}$$

En identifiant les deux expressions on obtient : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-6 \\ c-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$

Donc $f(x)=2x-4+\dfrac{1}{x-1}$ *; d'où :* $f(x)-(2x-4)=\dfrac{1}{x-1}$

*Et comme* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ *; alors* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(2x-4)=0$

*On conclut que* $C_f$ *admet la droite* $(\Delta)$ *d'équation* $y=2x-4$ *comme asymptote oblique au voisinage de* $\pm\infty$ *.*

## 8. ***Comment étudier la position relative de $C_f$ et d'une droite D qui lui est asymptote***

**Méthode**

*On calcule* $f(x)-y$ *; où* $y=ax+b$ *est une équation de la droite D.*

*On étudie ensuite le signe de* $f(x)-y$ *(à l'aide d'un tableau de signe)*

*On conclut que* $C_f$ *est au-dessus de D sur Intervalle où* $f(x)-y\geq 0$ *et que* $C_f$ *est au-dessous de D sur l'intervalle où* $f(x)-y\leq 0$

***Exemple***

*Dans l'exemple précèdent, étudier les positions relatives de* $C_f$ *et de la droite* $(\Delta)$ *d'équation* $y=2x-4$

***Solution***

*On a montré que pour* $x\neq 1$, $f(x)-(2x-4)=\dfrac{1}{x-1}$

*Etudions le signe de* $f(x)-y$ *avec* $x\neq 1$ *:* $f(x)-y$ *est du signe de* $x-1$

*Or* $x-1>0$ *pour* $x>1$ *et* $x-1<0$ *pour* $x<1$

*On peut donc dire que :*

*sur* $]1;+\infty[$ *;* $f(x)-y>0$

*Ce qui signifie que sur l'intervalle* $]1;+\infty[$ $C_f$ *est au-dessus de D.*

*Et sur* $]-\infty;1[$ *;* $f(x)-y<0$

*Ce qui signifie que sur l'intervalle* $]-\infty;1[$ $C_f$ *est au-dessous de D.*