Exercice 1 :

Partie A :

Soit f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(1+x)$

1) a) dresser le tableau de variation de f.

b) montrer que $f(x)=0$ admet deux solution dont l'une α appartient à l'intervalle $]-0,72;-0,71[$.

2) donner le signe de f.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

1) calculer les limites de g à droite et à gauche en 0, à droite en -1 et $+\infty$.

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[$

3) Montrer que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.en déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ à 10^{-2} prés.

4) Dresser le tableau de variation de g.

5) Tracer (C_g) (unité 2 cm).

6) Soit $\beta>1$,

On note $D(\beta)$ le domaine limité par (C_g) , l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=1$ et $x=\beta$

a) Soit $h(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}$; pour tout $x>0$

montrer que $h'(x)=\frac{1}{x}-g(x)$ et en déduire une primitive de g sur (C_g).

b) Déterminer en fonction β l'aire $D(\beta)$ en cm^2 .

c) Calculer $\lim_{\beta\to+\infty} D(\beta)$

Exercice 2 :

On considère les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^{-x^2}$; $g(x)=x^3e^{-x^2}$

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 5 cm)

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2) Déterminer les positions relatives de $\left(C_f\right)$et $\left(C_g\right)$

3) Tracer $\left(C_f\right)$et $\left(C_g\right)$ dans repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

4) On appelle la droite D d'équation $x=1$. soit A_f l'aire du domaine limité par la courbe $\left(C_f\right)$,les deux axes du repère et la droite D et soit A_g l'aire du domaine limité par la courbe $\left(C_g\right)$,les deux axes du repère et la droite D.

a) Calculer A_f .

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_g=-\frac{1}{2e}+A_f$.

c) Déduire A_g en cm^2.

Exercice 3 :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-e^{-\frac{x}{2}}$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $[0;1]$, justifier que $0{,}7<\alpha<0{,}71$.

3) En déduire le signe de g.

Partie B :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{x}{2}}+2-x$. Et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) exprimer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$.

2) a) montrer que $f(\alpha)=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$.

b) en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $0{,}1$.

3) a) déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) montrer que la droite $y=2-x$ est une asymptote à $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

4) dresser le tableau de variation de f.

5) a) déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et l'axe des abscisses.

b) déterminer les coordonnées de E le point d'intersection de $\left(C_f\right)$et l'axe des ordonnées.

c) donner l'équation de la tangente T à $\left(C_f\right)$en E.

6) tracer $\left(C_f\right)$ et T dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Partie C :

1) montrer que $F(x)=4e^{\frac{x}{2}}(x-3)+2x-\frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x)$.

2) calculer l'aire du domaine limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

Exercice 4 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et on note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2 cm).

Partie A :

1) montrer que : $f'(x)=\dfrac{f(x)}{1+e^{2x}}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2) dresser le tableau de variation de f

3) montrer que C admet un point d'inflexion I à déterminer

4) montrer que $f'(x)\leq\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

5) étudier la variation de $g(x)=f(x)-x$ et montrer que $g(x)=0$ admet une seule solution α telle que $\ln 2<\alpha<1$

6) tracer C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B :

1) montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à Préciser.

2) Déterminer $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) montrer que : $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$

4) tracer $\left(C_{f^{-1}}\right)$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 5:

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}} & si\ x\neq-1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$; et on note par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la continuité de f en -1

2) Etudier la dérivabilité de f en -1

3) Montrer que : $f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à Préciser.

7) Tracer $(C_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 1

9) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$; pour tout $x\in J$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=\sqrt{1-e^x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement ce résultat

b) Etudier les variations de f sur $]-\infty;0[$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) a) Montrer que pour tout $x\in[0;1[$, $f^{-1}(x)=\ln(1-x^2)$

b) Soit $F(x)=(x-1)\ln(1-x)+(x+1)\ln(1+x)-2x$; pour $x\in[0;1[$

c) Montrer que F est une primitive de f^{-1} sur $[0;1[$

c) vérifier que $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}$

d) Soit A l'aire de la partie limitée par $(C_{f^{-1}})$ et les droites $y=-\ln 2$, $x=0$ et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

montrer que $A=\left(8\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}\right)cm^2$

e) Déduire alors la valeur de l'intégrale $\int_{-\ln 2}^{0}\sqrt{1-e^x}\,dx$