Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \in \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$,

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

3) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $a_n = u_{2n}$ *et* $b_n = u_{2n+1}$

a) vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ b_n = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ a_n \leq b_n$.

f) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*

d) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes*

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ *puis déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$; $(\forall k \in \mathbb{N})$

1) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

2) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite*

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{1}{n+1} + S_n$

a) Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes*

b) En déduire la limites de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Partie A: Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x - 1$

1) Calculer $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; puis dresser le tableau de variations de f.

3) Prouver que f s'annule une fois et une seule sur $[0;+\infty[$ en un point α et que $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$

4) Déterminer le signe de f sur $[0;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.

***Partie B* : Détermination d'une valeur approchée de α.**

On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \frac{1}{x^2+4x+6}$

1) Déterminer un encadrement de x^2+4x+6 *pour* $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ *et en déduire que :* $0 \le g(x) \le \frac{1}{6}$

2) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$; $|g'(x)| \le \frac{5}{36}$

3) On considère maintenant la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = g(u_n)$

a) prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ (*utiliser l'encadrement* $0 \le g(x) \le \frac{1}{2}$) .

b) Prouver que $g(\alpha) = \alpha$ *et déduire que pour5 tout* $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{5}{36}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que la suite (u_n) *est convergente et donner sa limite.*

e) Justifier que ; $u_0 \le \alpha \le u_1$ *; puis en déduire, par récurrence, que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$;

$u_{2n} \le \alpha \le u_{2n+1}$