guessmaths

Exercice 1.

Soit n un nombre entier naturel non nul, on pose : $a_n = \underbrace{333.......33}_{\text{n fois le chiffre 3}}1$

1) Vérifier que a a_1 et a_2 sont premiers.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel k : $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$.

4) Démontrer que pour tout entier naturel k : $3a_{30k+1} \equiv 0\ [31]$, en déduire que 31 divise a_{30k+1}.

5) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul , si $n \equiv 1\,[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2.

On rappelle que $(\mathbb{C};+;\times)$, est un corps commutatif et $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR});+;\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice identique $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR});+;.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(a;b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \{M(a;b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR});+)$

2) On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2 = J \times J$ en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR});\times)$.

3) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})$ la loi de composition interne " $*$ " par :

$(\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathrm{IR}))$; $(\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathrm{IR}))$; $A * B = A \times N \times B$ avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathrm{IR})$ définie par : $((a;b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\})$; $\varphi(a+ib) = M(a;b)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathrm{IR});*)$

b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

c) En déduire que $(E^*;\times)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que : $A*(B+C) = (A*B)+(A*C)$.

5) Montrer que $(E;+;*)$ est un corps commutatif.

Exercice 3.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z suivante : $(E): z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que : $\Delta = \left(i\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2) On considère les points I , J , T_1 , T_2 et A d'affixes respectifs 1 ; – 1 ; $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$; $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$, montrer que les points O , K et A sont alignés.

c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3) Soit R la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Donner l'expression complexe de la rotation R.

b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation R est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$

c) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.

4) Déterminer l'affixe du point C l'image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

5) Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 4.

Partie I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & (\text{si } x>0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$. 0 ; 5 pts

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. 0 ; 25pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$. 0 ; 25pts

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$. 0 ; 25pts

c) Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;1[)$ / $f'(\alpha) = 0$. 0 ; 5 pts

d) En déduire que : $(\exists \alpha \in]0;1[)$ / $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$. 0 ; 5 pts

Partie II

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

(C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right)$; $\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$.

0,5 pts

b) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right) F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$.

1 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

1 pts

2) a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ puis calculer $F'(x)$.

0,5 pts

b) Etudier les variations de F sur $\left[0;+\infty\right[$.

0, 25pts

Partie III

1) a) Vérifier que : $\left(\forall t\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $-t\ln(t)\le e$.

0,5 pts

b) Montrer que : $\left(\forall t\in\left]0;+\infty\right[\right);f(t)\le\frac{1}{e}$.

0,25 pts

c) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right);F(x)\le x$.

0,25pts

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases}u_0\in\left]0;1\right[\\ u_{n+1}=F(u_n) & (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in\left]0;1\right[$.

0 ; 25 pts

b) Montrer la suite (u_n) est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

0 ; 5 pts

Exercice 5.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par : $\begin{cases}g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{Si } x>0\\ g(0)=0\end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.

0,5 pts

2) Pour tout x de $\left[0;+\infty\right[$, on pose : $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$.

a) Montrer que la fonction L est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.

0,25 pts

b) Calculer $L(x)$ pour tout $x>0$.

0 ;25 pts

c) Calculer $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ en déduire $L(0)$.

0,5 pts 3)

Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pts