guessmaths

Correction examen nationale 2015 Session de Rattrapage

2éme Bac SM A et B

Exercice 1:

Première Partie

1) a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $x*y=x+y-e^{xy}+1$

$$=y+x-e^{yx}+1$$

$$=y*x$$

Donc la loi $*$ est commutative.

b) Soit a l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$; alors :

$(\forall x\in\mathbb{R})$; $x*a=x \Leftrightarrow x+a-e^{xa}+1=x$

$$\Leftrightarrow e^{xa}=a+1$$
$$\Leftrightarrow xa=\ln(a+1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \ln(a+1) \end{cases} \quad \text{par identification}$$
$$\Leftrightarrow a=0$$

Donc 0 est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$

2) L'équation $3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions distinctes α et β dans $\mathbb{R}$.

Alors on a : $\begin{cases} 3+\alpha-e^{2\alpha}=0 \\ 3+\beta-e^{2\beta}=0 \end{cases}$ et $\alpha\neq\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+\alpha-e^{2\alpha}+1=0 \\ 2+\beta-e^{2\beta}+1=0 \end{cases} \text{ et } \alpha\neq\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2*\alpha=\alpha*2=0 \\ 2*\beta=\beta*2=0 \end{cases} \text{ et } \alpha\neq\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha*2)*\beta=0*\beta=\beta \\ \alpha*(2*\beta)=\alpha*0=\alpha \end{cases} \text{ et } \alpha\neq\beta$$

Donc par ce contre-exemple on montre que la loi $*$ n'est pas associative.

Deuxième Partie

1) F est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in F$

Soient $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux éléments de F ; et $\alpha\in\mathbb{R}$; on a :

$$\alpha\bullet M(x,y)+M(x',y')=\alpha\bullet\begin{pmatrix}x & -2y\\ \frac{y}{2} & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x' & -2y'\\ \frac{y'}{2} & x'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x+x' & -2\alpha y-2y'\\ \frac{\alpha y+y'}{2} & \alpha x+x'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x+x') & -2(\alpha y+y')\\ \frac{(\alpha y+y')}{2} & (\alpha x+x')\end{pmatrix}$$

$$=M(\alpha x+x',\alpha y+y')\in F$$

Ainsi pour tous $M(x,y)$ et $M(x',y')$ éléments de F et tout $\alpha\in\mathbb{R}$: on a :

$(\alpha\bullet M(x,y)+M(x',y'))\in F$

Donc F est stable pour les combinaisons linéaires par suite $(F,+,\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$.

2) Soient $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux éléments de F on a :

$$M(x,y)\times M(x',y')=\begin{pmatrix}x & -2y\\ \frac{y}{2} & x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x' & -2y'\\ \frac{y'}{2} & x'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xx'-yy' & -2xy'-2x'y\\ \frac{x'y}{2}+\frac{xy'}{2} & -yy'+xx'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(xx'-yy') & -2(x'y+xy')\\ \frac{(x'y+xy')}{2} & (xx'-yy')\end{pmatrix}$$

$$=M(xx'-yy',x'y+xy')\in F$$

Donc F est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

3) a) Soient $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}$ on a :

$$\varphi(z\times z')=\varphi((x+iy)\times(x'+iy'))$$

$$=\varphi((xx'-yy')+i(xy'+x'y))$$

$$=M(xx'-yy',xy'+x'y)$$

D'autre part d'après la question 2) on a : $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',x'y+xy')$

Donc $\varphi(z)\times\varphi(z')=M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',x'y+xy')$

D'où $\varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')$

Par suite φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$.

b) Soit $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$ un élément de F^* càd $(a,b)\neq(0,0)$; résolvons l'équation $\varphi(z)=M(a,b)$

On a : $\varphi(z)=M(a,b)\Leftrightarrow M(x,y)=M(a,b)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x=a \quad et \quad -2y=-2b \ et \ \frac{y}{2}=\frac{b}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=a \quad et \quad y=b$$

l'équation $\varphi(z)=M(a,b)$ admet une solution unique dans $\mathbb{C}^*$; donc φ de $\mathbb{C}^*$ vers F^*.

D'où $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$

c) d'après ce qui précède φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F^*,\times)$.

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif alors $\varphi((\mathbb{C}^*,\times))=(F^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $\varphi(1+0i)=M(1,0)=I$

Et le symétrique de $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$; donc le symétrique de $M(x,y)$ est $\varphi\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)=M\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

4) vérifions les assertions suivantes :

- $(F,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre $M(0,0)$.
- $(F^*,\times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.
- $\times$ est commutative dans F.

Ce qui est aisément facile à vérifier.

GUESSMATHS.CO

• $(F,+)$ est un groupe commutatif puisque • $(F,+)$ est un sous-groupe du groupe abélien $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+\right)$

• $\left(F^*,\times\right)$ est un groupe démontré dans 3)c).

• $\times$ est distributive par rapport à+ dans $(F,\times)$ car elle est distributive par rapport à + dans$\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

• $\times$ est commutative dans F démontré dans 3)c).

Donc $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 :

Première Partie

1) 13 est premier et $a\wedge 13=1$; d'après le petit théorème de FERMAT On a : $a^{12}\equiv 1[13]$; d'où $\left(a^{12}\right)^{168}\equiv 1^{168}[13]$

Ainsi $a^{2016}\equiv 1[13]$

2) $(E): x^{2015}\equiv 2[13]$

a) soit x solution de (E) ; posons $x\wedge 13=d$

Comme 13 est premier ; alors $d=13$ ou $d=1$

• Supposons que $d=13$; donc $13\mid x$

Ainsi $(\exists k\in\mathbb{Z})/\ x=13k$; et x solution de (E) ; alors : $(13k)^{2015}\equiv 2[13]$ $\boxed{1}$

Et $13k\equiv 0[13]$; donc $(13k)^{2015}\equiv 0[13]$ $\boxed{2}$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$; on obtient $2\equiv 0[13]$; càd $13\mid 2$

Ce qui est absurde par suite $d=1$; donc $x\wedge 13=1$

b) soit x une solution de (E) ; $x^{2015}\equiv 2[13]\Rightarrow x.x^{2015}\equiv 2x[13]$ $\boxed{3}$; et $x\equiv 1[13]\Rightarrow x^{2016}\equiv 1[13]$ $\boxed{4}$ (d'après la question précédente)

de $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ on obtient $2x\equiv 1[13]\Rightarrow 2x-14\equiv 0[13]$

$\Rightarrow 2(x-7)\equiv 0[13]$

$\Rightarrow x-7\equiv 0[13]$ (d'après Gauss car $2\wedge 13=1$)

$\Rightarrow x\equiv 7[13]$

3) x est solution de (E) donc $x\equiv 7[13]\Rightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})/\ x=7+13k$

Réciproquement si $x=7+13k$ avec $k\in\mathbb{Z}$; On a :

GUESSMATHS.CO

$$x \equiv 7[13] \Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 10[13] \\ x^3 \equiv 5[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 \equiv 9[13] \\ x^7 \equiv -1[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{11} \equiv 2[13] \\ x^{12} \equiv 1[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{11} \equiv 2[13] \\ x^{12\times 167} \equiv 1[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{12\times 167+11} \equiv 2[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$$

D'où $x = 7+13k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E)

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{x = 7+13k / k \in \mathbb{Z}\}$

Deuxième Partie

1) Soit n le numéro que porte la boule tirée ; pour que n soit solution de l'équation (E) il faut qu'il s'écrit $n = 7+13k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On sait que : $1 \le n \le 50 \Rightarrow 1 \le 7+13k \le 50$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow -6 \le 13k \le 43 \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{13} \le k \le \frac{43}{13} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -0,6 \le k \le 3,3 \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k \in \{0;1;2;3\}$$

Donc pour que n soit solution de l'équation (E) ; n doit prendre les valeurs suivantes :

$7;20;33$ ou 46 càd $n \in \{7+13k / k \in \{0;1;2;3\}\}$

2) Soit A l'événement « Obtenir une boule qui porte l'un des numéros $7;20;33$ ou 46 »

Donc $p(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{4}{50} = \dfrac{2}{25}$

L'expérience est répétée 3 fois dans les même conditions donc on est dans les conditions de Bernouille de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{25}$; alors la probabilité que l'événement A soit

réalisé exactement 2 fois est $p(A\text{"2fois"}) = C_3^2\left(\frac{2}{25}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{25}\right)^{3-2}$

$$= 3\times\frac{4}{25^2}\times\frac{23}{25}$$

$$= \frac{12\times 23}{25^3}$$

$$= \frac{276}{15625}$$

Exercice 3 :

1) $(E): z^2-(1+i)z+2+2i=0$

a) le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 0$

$$= 2i-8-8i$$

$$= -8-6i$$

$$= \left(1^2 - 2\times 3i + (3i)^2\right)$$

$$= (1-3i)^2$$

b) Donc les solutions de (E) sont :

$z_1 = \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = 2i$ et $z_2 = \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = 1-i$

c) On a : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i}$

$$= \frac{2i(1+i)}{2}$$

$$= i(1+i)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Donc $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) a) E est milieu du segment $[AB]$; alors $aff(E) = e$

$$= \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$= \frac{2i+1-i}{2}$$

GUESSMATHS.CO

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc $e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; on a :

$$r(E) = C \Leftrightarrow (c - z_1) = (e - z_1)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow c = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 2i\right) \times (-i) + 2i$$

$$\Leftrightarrow c = \left(-\frac{1}{2}i - \frac{3}{2}\right) + 2i$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

c) On a : $\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1 - i - 1 - \frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 1 - \frac{3}{2}i} \times \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1 - i - 2i}$

$$= \frac{-\frac{5}{2}i}{-\frac{5}{2}} \times \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}{1 - 3i}$$

$$= \frac{1}{2}i \times \frac{-3 - i}{1 - 3i}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 3i}{1 - 3i}$$

$$= \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc les points A ; B ; C et D sont alignés ou cocycliques.

- On a : $\frac{z_2 - z_1}{c - z_1} = \frac{1 - i - 2i}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}$

$$= \frac{1 - 3i}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i}$$

GUESSMATHS.CO

$$= 2 \times \frac{1-3i}{-3-i}$$

$$= 2i \times \frac{-i-3}{-3-i}$$

$$= 2i \in i\mathbb{R}$$

Donc les points A ; B et C ne sont pas colinéaires.

D'autre part on a : $\frac{z_2 - d}{z_1 - d} = \frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{2i-1-\frac{3}{2}i}$

$$= \frac{-\frac{5}{2}i}{-1+\frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{5i(2+i)}{5}$$

$$= \frac{5i(2+i)}{5}$$

$$= -1+2i \notin \mathbb{R}$$

Donc les points A ; B et D ne sont pas colinéaires

Par suite les points A ; B ; C et D ne sont pas colinéaires ; d'où ils sont cocycliques.

Exercice 4 :

Pour tout n entier naturel ; $f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

1) a) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{3}{2}n} e^{-\frac{3x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}n}}{\left(e^x\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{3}{2}n} e^{-\frac{3x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}n}}{\left(e^x\right)^{\frac{3}{2}}} = +\infty$)

GUESSMATHS.CO

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{3}{2}n} e^{-\frac{3x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{\frac{3}{2}n}}{\left(e^x\right)^{\frac{3}{2}}} = +\infty$)

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=0$

Interprétation géométrique

(C_n) admet deux asymptote horizontale une d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$ et une d'équation $y=0$ (càd l'axe des abscisses) au voisinage de $-\infty$

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule jamais ; et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f_n'(x) = -\dfrac{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$

$$= -\frac{\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{3e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f_n'(x) = \dfrac{3e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$

c) On a : $f_n'(x)>0$; $(\forall x\in\mathbb{R})$

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) On a : • $x\in\mathbb{R}$ alors $(2n-x)\in\mathbb{R}$

• $f_n(2n-x)+f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}} + \dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

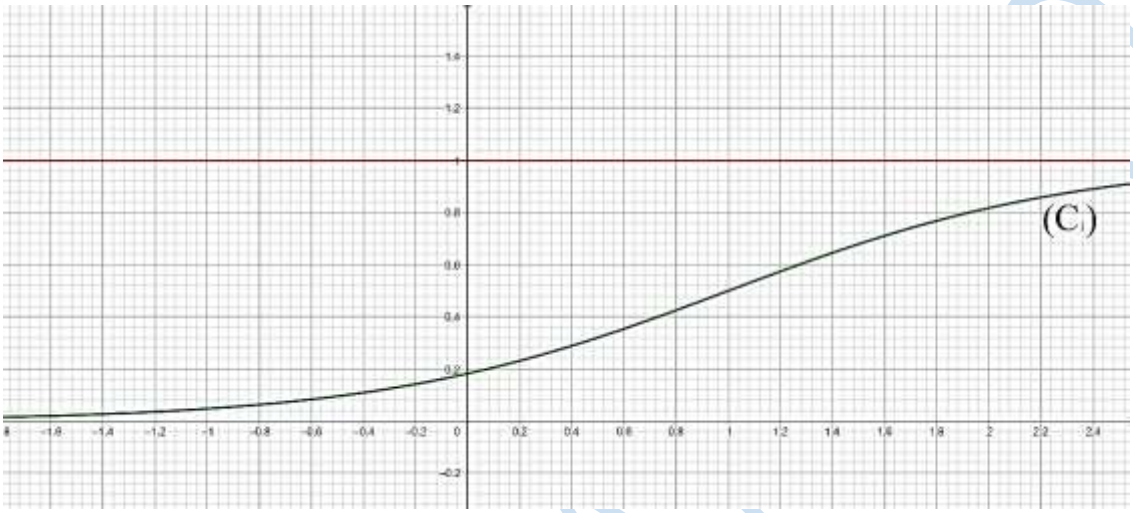
$$= \frac{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+1+e^{\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)}$$

GUESSMATHS.CO

$$= \frac{2 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + e^{\frac{3}{2}(x-n)}}{1 + e^{\frac{3}{2}(x-n)} + e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + 1}$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}$$

Donc le point $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_n)

b) Construction de la courbe (C_1)



c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_1) et les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$ et $y = 0$

On a : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx$

$$= \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (\text{car } f_n(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R})$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)}}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)} - e^{-\frac{3}{2}(x-1)}}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)}}\,dx$$
$$= \int_0^1 1 + \frac{2}{3}\frac{\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}(x-1)}\right)}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)}}\,dx$$
$$= \left[x + \frac{2}{3}\ln\left(1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)}\right)\right]_0^1$$
$$= 1 + \frac{2}{3}\left(\ln 2 - \ln\left(1 + e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

GUESSMATHS

$$= 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc $\mathcal{A} = 1 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\frac{3}{2}}}\right)$ $(u.a)$

3) a) Pour $n > 0$ on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = f_n(x) - x$

g_n est continue dérivable sur $\mathbb{R}$;comme somme de deux fonctions qui le sont.

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $g_n'(x) = f_n'(x) - 1$

$$= \frac{3e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{3e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 2\left(1+2e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+e^{-3(x-n)}\right)^2}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{3e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 2 - 4e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 2e^{-3(x-n)}}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(2+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+2e^{-3(x-n)}\right)}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g_n'(x) < 0$

D'où g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; de plus

$$g_n(]0,n[) =]g_n(n), g_n(0)[$$

$$=]f_n(n) - n, f_n(0) - 0[$$

$$= \left]\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(n-n)}} - n, \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}n}}\right[$$

$$= \left]\frac{1}{2} - n, \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}n}}\right[$$

GUESSMATHS.CO

Et $0 \in \left]\frac{1}{2}-n, \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}n}}\right[$; alors d'après TVI l'équation $g_n(x)=0$ (càd $f_n(x)=x$ admet une unique solution u_n dans $]0,n[$.

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R})$; on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}-\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

$$=\frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}-\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

On a : $e^{\frac{3}{2}}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}>e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}<\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}-\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}<0$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x)<f_n(x)$$

c) pour $x=u_{n+1}$; on a $f_{n+1}(u_{n+1})<f_n(u_{n+1})$; et $f_{n+1}(u_{n+1})=n+1$ donc $f_n(u_{n+1})>n+1$ et $f_n(u_n)=n$; d'où $f_n(u_{n+1})>f_n(u_n)$

Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc $u_{n+1}>u_n$

D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

Et comme (u_n) est majorée par n ; alors elle est convergente.

d) On a : $f_n(u_n)=u_n \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(u_n-n)}}=u_n$; Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$; on obtient :

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(\ell-n)}}=\ell \text{ et comme } \lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{3}{2}(\ell-n)}=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-\frac{3}{2}\ell}\times e^{\frac{3}{2}n}\right)=+\infty$$

$$\Rightarrow \ell=0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 5 :

$g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

1) on a : • $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ alors $(-x \in \mathbb{R}^*)$

- $g(-x)=\int_{-x}^{-3x}\frac{\cos t}{t}dt$; on pose le changement de variable $u=-t$ alors

$$g(-x)=\int_{-x}^{-3x}\frac{\cos t}{t}dt$$

$$=\int_{x}^{3x}\frac{\cos(-u)}{-u}(-du) \qquad t=-x \text{ alorr } u=x \text{ et } dt=-du$$

$$=\int_{x}^{3x}\frac{\cos u}{u}du$$

$$=g(x)$$

Donc g est une fonction paire.

2) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=\frac{\cos x}{x}$; et $a\in]0;+\infty[$

Alors φ est continue sur $]0;+\infty[$ (comme quotient de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$) ; donc φ admet une primitive sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en a définie comme suit : $\psi(x)=\int_{a}^{x}\frac{\cos t}{t}dt$

D'où $g(x)=\int_{x}^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$

$$=\int_{x}^{a}\frac{\cos t}{t}dt+\int_{a}^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$$

$$=-\int_{a}^{x}\frac{\cos t}{t}dt+\int_{a}^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$$

$$=\psi(3x)-\psi(x)$$

D'autre part la fonction $x\mapsto\psi(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$; ainsi que la fonction $x\mapsto\psi(3x)$

Donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x\in]0;+\infty[$: $g'(x)=3\psi'(3x)-\psi'(x)$

Et $\psi'(x)=\varphi(x)$; d'où : $g'(x)=3\varphi(3x)-\varphi(x)$

$$=3\times\frac{\cos(3x)}{3x}-\frac{\cos x}{x}$$

$$=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x}$$

GUESSMATHS.CO

Donc $\left(\forall x \in]0;+\infty[\right)\ ;\ g'(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{x}$

3) a) Calculons $\int_x^{3x}\dfrac{\cos t}{t}dt$ en utilisant une intégration par parties.

On pose : $\begin{cases} u=\dfrac{1}{t} & \text{alors } u=-\dfrac{1}{t^2} \\ v'=\cos t & \text{alors } v=\sin t \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\left[\frac{1}{t}\times\sin t\right]_x^{3x}-\int_x^{3x}\left(-\frac{1}{t^2}\times\sin t\right)dt$$

$$=\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

$$=\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

$$=\frac{\sin(3x)-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

b) On a pour tout $x>0$:

$$g(x)=\frac{\sin(3x)-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt \Rightarrow |g(x)|=\left|\frac{\sin(3x)-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|$$

$$\Rightarrow |g(x)|\le\left|\frac{\sin(3x)}{3x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|$$

$$\Rightarrow |g(x)|\le\left|\frac{\sin(3x)}{3x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt$$

D'autre part : $t\ge x \Rightarrow t^2\ge x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2}\le\frac{1}{x^2} \qquad et\ |\sin t|\le 1$$

$$\text{Donc } \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt\le \int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt$$

$$\Rightarrow\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt\le-\frac{1}{3x}-\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt\le\frac{2}{3x}$$

GUESSMATHS.CO

Et $\left|\frac{\sin(3x)}{3x}\right| \le \frac{1}{3x}$; $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$

D'où $|g(x)| \le \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} \Rightarrow |g(x)| \le \frac{6}{3x} = \frac{2}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$; alors par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

4) a) pour tout $x > 0$; et $t \in [x, 3x]$; on considère la fonction $h(t) = 1 - t - \cos t$

Alors h est dérivable et pour tout $t > 0$; on a : $h'(t) = -1 + \sin t < 0$

Donc h est décroissante ; par suite $t > 0$; on a : $h(t) \le h(0)$ et $h(0) = 0$

D'où pour tout $t > 0$: • $1 - \cos t \le t \Rightarrow \frac{1-\cos t}{t} \le 1$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t} dt \le \int_x^{3x} 1 dt$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t} dt \le 2x$$

• $\frac{1-\cos t}{t} \ge 0 \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t} dt \ge 0$

Conclusion : $(\forall x > 0)$; $0 \le \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t} dt \le 2x$ [1]

b) pour tout $x > 0$;on a : $\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$

$$= g(x) - [\ln t]_x^{3x}$$

$$= g(x) - (\ln 3x - \ln x)$$

$$= g(x) - \ln \frac{3x}{x}$$

$$= g(x) - \ln 3$$

Donc $(\forall x > 0)$; $g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$ [2]

c) D'après [1] et [2] on obtient : $(\forall x > 0)$; $-2x \le g(x) - \ln 3 \le 0$

On en déduit par encadrement que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \ln 3$