Exercice 1 :(6.5points)

A- 1- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ; 1+x\le e^{x}$

2- a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\ ; 0\le 1-e^{-x}\le x$

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\ ; 0\le 1-x+\dfrac{x^{2}}{2}-e^{-x}\le\dfrac{x^{3}}{6}$

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}=-\dfrac{1}{2}$

B- On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $I=[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} & si\ x\neq 0\end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Vérifier que : $\forall x>0\ ;\ \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^{2}}-\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}$

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

2- a) Montrer que : $\forall x>0\ ; f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{2}}\left(2x+1-e^{x}(1+x)\right)$

b) Montrer que : $\forall x>0\ ; f'(x)\le -e^{-2x}$ (on pourra utiliser : $1+x\le e^{x}$)

c) En déduire le sens de variation de f sur I.

3- On admet que : $\forall x>0\ ;\ f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}\left(-4x^{2}-4x-2+e^{x}\left(2+2x+x^{2}\right)\right)$

a) Montrer que : $\forall x\ge 0 ; 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\le e^{x}$

b) Déduire que : $\forall x>0\ ; f''(x)>0$

4- On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

b) En déduire que : $(\forall x\in I)\ ; |f'(x)|\le\dfrac{3}{2}$

5- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; puis interpréter géométriquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer la position relative de la courbe (C) et sa demi-tangente au point $T(0,1)$

d) Représenter la courbe (C) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

C- 1- Pour tout $x \in [0,1]$; on pose $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J à déterminer.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$; tel que : $f(\alpha) = \alpha$

2- Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in \{0,1,........,n\}$; on considère les nombres réels $x_k = \frac{k\alpha}{n}$; et on pose $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

a) Montrer que : $\forall k \in \{0,1,........,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)dt$

b) En déduire que : $\forall k \in \{0,1,........,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$

3- On pose : $L = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \frac{3}{4} \times \frac{\alpha^2}{n}$

b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 :

Soit $m \in \mathbb{C} | \{-1,0,1\}$.

Première partie :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E_m) : mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$

1- a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (m^2 - 1)^2$

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

2- On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$; avec $0 < \theta < \pi$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Deuxième partie :

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\frac{1}{m} - 1$

1- Montrer que les points O ; A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

2- On suppose que m n'est pas un réel.

Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Et soient $P(p)$; $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$; $[AD]$ et $[OB]$

a) Montrer que l'affixe du point C est $c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point

D est $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Montrer que : $2(p-r) = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ et

$2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(\frac{1}{m}-m\right)$

c) Montrer que : $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

d) Quelle est la nature du triangle PQR ? justifier votre réponse.

Exercice 3:

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif non intègre d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (les lois + et × sont respectivement l'addition et la multiplication usuelles des matrices)

Pour tout réel a on pose : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$

1- Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R})$; $\varphi(a) = M(a)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$; en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

c) Déterminer J l'élément neutre de $(G,\times)$.

d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$

e) Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1)\times X = M(2)$

2- a) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})$; $M(a)\times J = M(a)\times I$.

b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$; $M(a)$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

c) Vérifier que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; avec $x \in \mathbb{R}$ sont des solutions dans $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times\right)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

<u>Exercice 4</u> :

1- Montre que le nombre 137 est premier.

2- Déterminer (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$

3- Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$

a) Montrer que x est 137 sont premiers entre eux.

b) Montrer que $x^{136} \equiv 1[137]$

c) Montrer que $x^2 \equiv 1[137]$

4- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{19} \equiv 1[137]$