Devoir surveille n°1 (2) $2^{iéme}$ Bac S.M

Exercice 1: **(8points)**

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.\sqrt[6]{x}$ **1pt**

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$. **1pt**

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{x}{2}E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$ **0.5pt**

3. a) Montrer que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ :\ \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ **1pt**

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}$ et déduire $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan(x)-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}$ **1pt**

4. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f([0;1])\subset\left]1;+\infty\right[$

Montrer que : $(\exists c\in\left]0;1\right[)$ tel que : $f\left(c^2\right)=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ **1pt**

5. Soit g la fonction définie sur $[-1;1]-\{0\}$ par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$

Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 que l'on déterminera. **1pt**

6. Soit f une fonction continue sur $\left]0;1\right[$ telle que : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$.

On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\arctan(f(x)) & si\ x\in\left]0;1\right[\\ g(0)=-\dfrac{\pi}{2}\ \ et\ \ g(1)=\dfrac{\pi}{2} & \end{cases}$

   a) Montrer que g est continue sur $\left]0;1\right[$. **0.5pt**

   b) En déduire que : $(\exists c\in\left]0;1\right[)$ tel que : $f(c)=0$ **0.5pt**

7. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\arctan(x)+x=0\Leftrightarrow x=0$. **0.5pt**

Exercice 2: 5points

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$ **1pt**

2. a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$; $f'(x)=\dfrac{-1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$ **1pt**

b) *En déduire que f réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *vers* $\mathbb{R}^{*+}$ **1pt**

3. a) *Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ **1pt**

b) *En déduire une expression de* $f^{-1}(x)$ *en fonction de r pour tout x de* $\mathbb{R}^{*+}$. **1pt**

<u>Exercice 3</u>: 5points

Soit f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x)=2\arctan\left(\frac{x^n}{1+\sqrt{1+x^{2n}}}\right)$ *où n est un entier naturel impair.*

1. a) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\exists!\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $/\tan(\alpha)=x^n$. **1pt**

b) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f_n(x)=\arctan(x^n)$. **1pt**

c) *En déduire que :* $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$ **1pt**

2. *Montrer que* f_n *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers un intervalle J qu'on déterminera.* **1pt**

3. *Expliciter* $f_n^{-1}(x)$ *pour tout x de J.* **1pt**

<u>Exercice 4</u>: 2points

Soit F la fonction définie par : $F(x)=\sqrt[n]{1+nx}-1$ *où* $n\in \mathbb{N}^*-\{1\}$.

1. *Déterminer* D_f *et calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$

2. *Montrer que F admet une fonction réciproque définie sur* $[-1;+\infty[$.

3. *Calculer* $F^{-1}(x)$ *pour tout x de* $[-1;+\infty[$.

4. a) *En utilisant l'inégalité de Bernoulli :* $(\forall n\in\mathbb{N})\left(\forall a\in\mathbb{R}^+\right)$; $(1+a)^n > 1+na$

Montrer que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{n};+\infty\right[$; $F(x)\leq x$.

b) *Montrer que l'équation* $F(x)=x$ *admet une unique solution dans* $\left[-\frac{1}{n};+\infty\right[$