Nombres complexes – Exercices **2éme Bac SM**

Exercice 1

1. Prérequis : pour tous nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$ Démontrer par récurrence que, pour tout nombre complexe $z \neq 0$ et pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$

a) Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) En déduire une forme trigonométrique de z^{40} .

Exercice 2

1. En posant $Z = \frac{z'}{z}$ et en écrivant $Zz = z'$, démontrer que, pour tous nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $arg\left(\frac{z'}{z}\right) = arg(z') - arg(z)[2\pi]$

2. On donne $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ et $z' = 5\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

En déduire une forme trigonométrique de $\frac{z}{z'}$ et de $\frac{z'}{z}$.

Exercice 3 Vrai ou faux

a. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

b. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

c. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

d. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 4 QCM

Pour chaque question, au moins une des quatre réponses proposées est exacte. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$ et $z_D = -i$.

1. L'ensemble des points d'affixe z tel que $||z + i| = |z - 1|$ est :

a. la médiatrice du segment $[BC]$

b. le milieu du segment $[BC]$

c. le cercle de centre O et de rayon 1

d. la médiatrice du segment $[AD]$

2. L'ensemble des points d'affixe z tel que $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

a. la droite (CD) privée du point C

b. le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C

c. le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C

d. la médiatrice du segment $[AB]$

3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ est :

a. le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A.

b. la droite (BD).

c. la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B.

d. le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et de D.

Exercice 5

On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer j^2 ; j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.

b) Vérifier que $1+j+j^2=0$.

c) Calculer la somme $S=1+j+j^2+\cdots+j^{2019}+j^{2020}$.

Exercice 6

On considère le polynôme P défini par : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis trouver un polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on ait $P(z)=(z^2+3)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3. Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=i\sqrt{3}$; $z_B=-i\sqrt{3}$; $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O.
Conjecturer la nature du triangle BEC, puis démontrer votre conjecture.

Exercice 7

Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+(1-4i)z-2i$.

a. Trouver le réel α tel que $P(i\alpha)=0$.

b. Trouver les nombres complexes p et q tels que $P(z)=(z-i\alpha)(z^2+pz+q)$.

c. En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 8

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(3+4i)z+5\overline{z}^6$. On définit la fonction f par $f(M)=M'$.

1. On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A=1+2i$; $z_B=1$ et $z_C=3i$.
Déterminer les affixes des points A' ; B' et C' images respectives de A, B et C par f.
Placer les points A ; B ; C ; A' ; B' et C'.

2. On pose $z=x+iy$, avec x et y réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

Tracer D. Que remarque-t-on ? (Indication : un point invariant par f, ou point fixe, est un point M tel que f(M) = M). 4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite D.

Exercice 9

1. a. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = 1-z^n$.

   b. En déduire que $z^n = 1$ si, et seulement si, $z = 1$ ou $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0$.

2. On pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

   a. Vérifier que $\omega^5 = 1$, puis que $\omega^4 = \omega$ et $\omega^3 = \omega^2$.

   b. On pose $u = w + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Montrer que $u + v = uv = -1$

. c. Déterminer une équation du second degré dont u et v sont les deux solutions.

   d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

3. Soit A_i le point d'affixe ω^i pour i entier naturel.

   a. Montrer que $A_i = A_{i+5}$.

   Quelles sont les coordonnées de A_1 ?

   b. Pour tout i, calculer OA_i , puis A_iA_{i+1}.

   On dit alors que le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

Exercice 10

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

$z_1 = -1$; $z_2 = i$; $z_3 = 1+i$; $z_4 = -1-i$;
$z_5 = 1+i\sqrt{3}$; $z_6 = 3+4i$; $z_7 = 7+24i$; $z_8 = 3-4i$;
$z_9 = 24-10i$.