Série n° 16 d'exercices « fonction exponentielle » **2éme Bac SM**

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=4x+1-xe^{x}$
On note par C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4 *cm)*

Partie A :

1) *Calculer* $f'(x)$ *puis* $f''(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *et déduire le signe de* $f''(x)$
2) *Dresser le tableau de variation de* f'
3) *Montrer que* $f'(x)=0$ *admet une seule solution* α *telle que* $0{,}79<\alpha<0{,}8$
4) *Dresser le tableau de variation de f*
5) *Montrer que* $f(x)=0$ *admet une solution unique* β *telle que* $0{,}79<\beta<0{,}8$
6) *Construire C*
7) *a) Calculer* $\int_0^{\beta} xe^{x}dx$

   b) Déduire l'expression en fonction de $\int_0^{\beta} f(x)dx = 2\beta^2+\beta+2+\dfrac{1}{\beta}$

   d) montrer que = et déduire que = 2 + + 2 +

   e) Soit $h(x)=\ln\left(4+\dfrac{1}{x}\right)$, *montrer que* $h(\beta)=\beta$

Exercice 2 :

Partie A :

Soit $g(x)=1+x+e^{x}$

1) *Etudier g*

2) *Montrer que* $g(x)=0$ *admet une seul solution* α *telle que :* $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$.

3) *Etudier le signe de g*

Partie B :

Soit $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{1+e^{x}}$, *on désigne par C sa courbe dans un repère*

1) *a) dresser le tableau de variation de f*

   b) montrer que $f(\alpha)=1+\alpha$

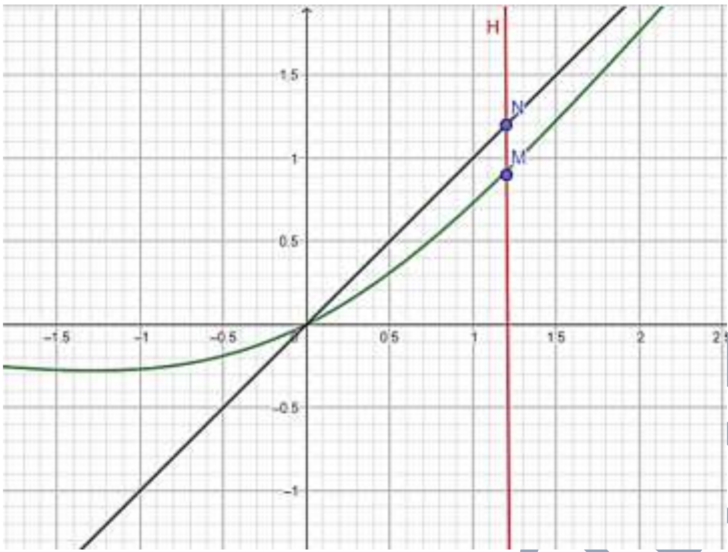
   c) montrer que $D: y=x$ *est une asymptote oblique au voisinage de* $+\infty$

   d) Ecrire l'équation de la tangente T à C au point $O(0,0)$

puis étudier la position relative de T par rapport à C

e) Tracer C

2) Soit $H(x,0)$, la parallèle à l'axe Oy passant par H coupe C en M et la droite D en N On note $K(x)=MN$



a) montrer que $K(x)=\dfrac{x}{1+e^{x}}$

b) montrer que $K'(x)=\dfrac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}\times g(-x)$

c) Déduire que MN est maximale en $(-\alpha)$

3) Montrer que $f(-\alpha)=1$

4) Montrer que la tangente à C au point A d'abscisse $(-\alpha)$ est parallèle à D

5) a) Montrer que pour tout $x\geq 1$; on a : $\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\leq f(x)\leq x$

b) Déduire un encadrement de l'aire du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=1$ et $x=-\alpha$

Exercice 3 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $\Omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

b) Vérifier que $\Omega\in(C_f)$.Conclure.

c) Déterminer une équation de la tangente T à (C_f) au point Ω

2) Etudier f et tracer (C_f).

3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ où $m\in\mathbb{R}$

4) a) Soit $\alpha>2$.

Calculer $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations : $x=\ln 2$; $x=\ln\alpha$ et la droite $D: y=2x+1$ et la courbe (C_f)

b) Calculer alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

Partie B :

Soit (I_n) la suite définie sur par : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}dx$

1).Calculer I_1

2).Montrer que (I_n) est décroissante

3) a) Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\leq I_n\leq\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$

b) En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in[0;1])$ on a : $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{x+1}\leq\dfrac{1-x}{2}$

b) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}-\dfrac{1}{n^2}\leq I_n\leq\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$

c) En déduire que (I_n) est convergente et retrouver sa limite.