



Examen national 2015 session de rattrapage

2ème Bac SM

Exercice 1 :(4 points)

Partie 1

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x + y - e^{xy} + 1$$

25 1- a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$

50 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

50 2- Sachant que l'équation: $3+x-e^{2x}=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes a et b
Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$

Partie 2

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$ et soit $F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

50 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

50 2- Montrer que F est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$

3- On considère l'application j de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $x + iy$ (Où x et y sont deux réels) la matrice $M(x, y)$.

50 a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F, \times)$

25 b) On pose : $F^* = F - \{M(0, 0)\}$.

Montrer que $j(\mathbb{C}^*) = F^*$

25 c) Montrer que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.

75 4- Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps Commutatif.

Exercice 2 : (3 points)

0.50 I -1) a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1 [13]$

2) On considère dans l'équation (E): $x^{2015} \equiv 2 [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

0.50 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.50 b) Montrer que : $x \equiv 7 [13]$

0.50 3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

II - Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50
(les boules sont indiscernables au toucher)

0.50 1- On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

- 0.50 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

Exercice 3 : (3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) : $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

- 0.25 1 - a) Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

- 0.50 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 imaginaire pur).

- 0.50 c) Montrer que: $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2

- 0.25 a) Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment [AB]

- 0.50 b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et c l'affixe du point C image du point par la rotation r. Montrer que : $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

- 1 c) On considère D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre

$\frac{z_2 - d}{c - d} \times \frac{c - z_1}{z_2 - z_1}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 4 : (6 points)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur par: $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0.75 1 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

- 0.75 b) Montrer que la fonction f_n est dérivable IR sur puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de IR

- 0.25 c) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur IR

- 0.50 2 - a) Montrer que le point $I_n\left(n; \frac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)

- 0.50 b) Construire la courbe (C_1)

- 0.75 c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations $x=0$; $x=1$ et $y=0$

- 0.75 3 - a) Pour tout x de $\mathbb{N}^*$ montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $]0; n[$
- 0.50 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) < f_n(x)$
- 0.75 c) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 0.50 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 5: (4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

- 0.50 1- Montrer que la fonction g est paire.
- 0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$
- 0.50 3- a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:
- $$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$
- 0.75 b) Montrer que: $(\forall x > 0) |g(x)| \leq \frac{2}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 0.50 4 - a) Montrer que: $(\forall x > 0) 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$
(Remarquer que $((\forall t > 0) 1 - \cos t \leq t)$)
- 0.50 b) Vérifier que: $(\forall x > 0) g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$
- 0.50 c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$