Mathématiques - ECS1

26

Dérivation

et accroissements finis.

Lycée La Bruyère
30 avenue de Paris
78000 Versailles

ECS
Première année

26 Dérivation et accroissements finis

26.1 Objectifs.

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point.	Interprétation graphique.
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée.	Notation f'.
Dérivée d'un polynôme.	
Dérivation des fonctions réciproques.	
Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	(1) Si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2$, $a \leqslant b$, $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$. (2) Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b)-f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geq 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Définition et dérivation de la fonction $\arctan$.	L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.
Fonction p fois dérivable en un point.	Notation $f^{(p)}$.
Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.	
La dérivée $(n+1)$-ï¿$\frac{1}{2}$me d'un polynôme de degré au plus n est nulle.	

26.2 Dérivation

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

26.2.1 Nombre dérivé d'une fonction en un point.

On commence avec la définition [1] :

1. La définition a très peu changé : Cauchy définit la dérivée d'une fonction en un réel x comme la limite lorsqu'elle existe du rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quand i tend vers 0.

Définition 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite lorsque x tend vers x_0 en restant dans $I \backslash \{x_0\}$.
Si cette limite existe, on la note $f'(x_0)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en x_0.

Remarque 1. *Il est équivalent de demander que le rapport* $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *possède une limite lorsque* h *tend vers* 0.

Définition 2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0, l'application $\delta f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est appelée approximation affine de f en x_0.

Exemple 1. On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$.
Etudions les taux d'accroissements $\dfrac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0}$: pour tout $x \neq x_0$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ donc cos est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, lorsque $x \to x_0$, $\cos\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right) \longrightarrow \cos x_0$ et par composition de limites, $\dfrac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \longrightarrow 1$ donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \cos x_0$$

La fonction sin est donc dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\sin'(x_0) = \cos x_0$.

Définition 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur I si f possède un nombre dérivé en tout point de I.

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, on note f' l'application $x \in I \mapsto f'(x)$.

■ ***Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite***

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

Définition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \sin|x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

(1) *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

(2) *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Remarque 2. *Attention, la continuité n'implique pas en général la dérivabilité.*

Exercice 1. *Soit $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f'(0)$.*

26.2.2 Tangente à une courbe en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite T passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et dirigée par le vecteur $(1, f'(x_0))$.

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle P le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, f'(x_0))$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in T &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{PM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \text{la matrice } \begin{pmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - f(x_0) & f'(x_0) \end{pmatrix} \text{ est non inversible} \\ &\iff (x - x_0)f'(x_0) - (y - f(x_0)) = 0 \end{aligned}$$

Proposition 2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

26.2.3 Opérations algébriques et dérivation

Proposition 3. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0 alors $\lambda f + g$ et fg sont dérivables en x_0 et*

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{et } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Corollaire 4. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + g$ et fg sont dérivables sur I et*

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Proposition 5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est dérivable sur I alors f^n est dérivable sur I et*

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}$$

Corollaire 6. *L'ensemble des fonctions dérivables $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable pour le produit des fonctions.*

Remarque 3. L'application $D : f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}) \mapsto f'$ est une application linéaire.

Proposition 7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0 et si f ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Corollaire 8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

Proposition 9. *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

26.2.4 Composition et dérivation

■ ***Dérivée d'une fonction composée.***

Proposition 10. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Proposition 11. *Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

■ ***Dérivée d'une fonction réciproque.***

Proposition 12. *Soient I, J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction. Si f est bijective, dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

26.2.5 La fonction arctangente

La fonction $\tau : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est définie, continue, impaire et strictement croissante.

Puisque $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tau(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tau(x) = +\infty$, la fonction τ réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection.

Définition 6. La fonction réciproque de τ est la fonction arctangente, notée arctan.

La fonction arctan est

(1) définie sur $\mathbb{R}$,

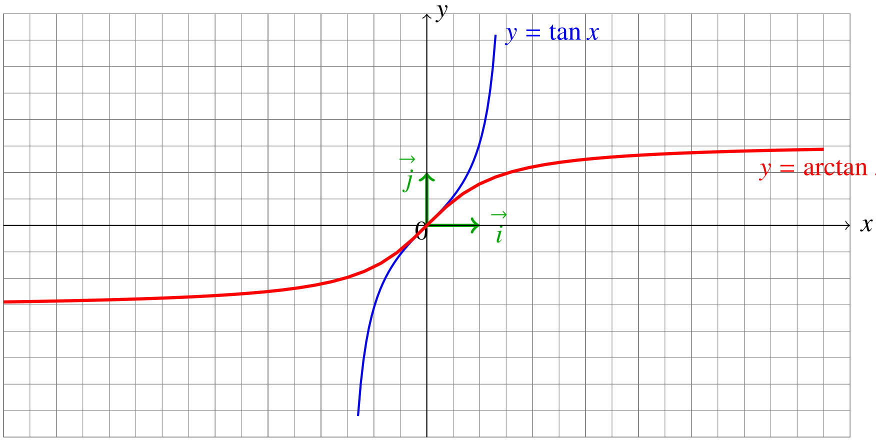
(2) impaire sur $\mathbb{R}$,

(3) strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

(4) continue sur $\mathbb{R}$,

(5) et a pour limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

Sa représentation graphique est :



La fonction $\tau : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et bijective.

Sa dérivée est donnée par $\tau' : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto 1 + \tan^2 x$ donc elle ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition 13. *La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Remarque 4. *La fonction arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.*

Exercice 2. *Etablir l'égalité : $2 \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{4}{3}$.*

Exercice 3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.*

26.3 Dérivées successives

26.3.1 Dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

■ ***Fonctions n fois dérivable sur un intervalle***

On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I. La dérivée de f' s'appelle dérivée seconde de f et elle est noté f'' ou $f^{(2)}$.

Pour un entier $n \geq 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ dérivable sur I et si la $(n-1)$-ème dérivée de f, notée $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. La dérivée $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée n-ème ou d'ordre n et est notée $f^{(n)}$.

Pour $n = 1$, on a bien évidemment $f^{(1)} = f'$ et on convient de poser $f^{(0)} = f$.

Remarque 5. *On rencontre aussi la notation* $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ *pour la dérivée n-ème de f.*

Si f est n fois dérivable sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{D}^n$ sur I et on note $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.

Proposition 14. *Soit n et p deux entiers naturels. Alors $x \mapsto x^p$ est n fois dérivable et sa dérivée n-ème est donnée par*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ \dfrac{x^{p-n}}{(p-n)!} & \text{si } n \leq p. \end{cases}$$

Corollaire 15. *Soit p une fonction polynôme de degré au plus n. Alors la dérivée $n+1$-ème de p est nulle.*

Formule de Taylor . *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$$

Remarque 6. *Cette formule reste vraie si P est un polynôme complexe et $a \in \mathbb{C}$.*

Proposition 16. *On note $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors le nombre a est racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Exercice 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$*

Quel est l'ordre de la multiplicité de la racine 1.

Même question avec le polynôme $Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

■ *Fonctions n fois dérivable en un point*

Définition 7. On dit que f est n fois dérivable en un point x_0 si f est $n-1$ dérivable au voisinage de x_0 et si la $(n-1)$-ème dérivée $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0.

■ *Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$*

Définition 8. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

■ ***Fonctions de classe*** $\mathscr{C}^\infty$

Définition 9. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée à tout ordre.

Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit aussi qu'une telle fonction est indéfiniment dérivable.

On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

On a donc

$$\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}^n(I, \mathbb{R})$$

Exemple 3. Les fonctions usuelles $(\exp, \ln, \sin, \cos, \textit{etc.})$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

— pour tout x, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$
— pour tout x, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
— pour tout x, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
— pour tout $x > 0$, $\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

26.3.2 Opérations algébriques et dérivées successives

■ ***Formule de Leibniz***

Formule de Leibniz . *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f, g sont n fois dérivables sur un intervalle I alors fg est n fois dérivable sur I et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple 4. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\mathrm{e}^x$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = x\mathrm{e}^x + n\mathrm{e}^x$$

EXERCICE 5. *En remarquant que $x^{2n} = (x^n)^2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.*

EXERCICE 6. *Pour tout entier naturel n, on considère l'application P_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par : $P_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ où $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ désigne la dérivée d'ordre n au point x de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.*

Établir pour tout x réel la relation : $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$

Proposition 17. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels stables pour le produit des fonctions.*

Ainsi, une combinaison linéaire de fonctions n fois dérivables est n fois dérivable, un produit de fonctions n fois dérivables est n fois dérivable, etc…

26.3.3 Composition

Proposition 18. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f et g sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) sur leur intervalle respectif alors $g \circ f$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Corollaire 19. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur intervalle respectif alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

Proposition 20. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est n fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et si f ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Corollaire 21. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et si f ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

Exemple 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction Arctan est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

26.4 Accroissements finis

26.4.1 Extremum d'une fonction

Soit I un intervalle non trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

On appelle point intérieur à I tout point qui n'est pas une extrémité de I.

■ ***Maximum local, minimum local.***

Définition 10. On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

■ ***Maximum global, minimum global.***

Définition 11. On dit que f admet un maximum global en x_0 si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f admet un minimum global en x_0 si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

■ ***Extremum***

Définition 12. On dit que f admet un extremum local (resp. global) en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local (resp. global) en x_0.

Définition 13. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et x_0 un point intérieur à I.

On dit que x_0 est point critique de f lorsque $f'(x_0) = 0$.

Proposition 22. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 7. *Le résultat est faux en général si x_0 est une borne de I comme le montre l'exemple $I = [0, 1]$ et $f(x) = x$.*

Remarque 8. *La réciproque est fausse en général : $f'(x_0) = 0$ n'implique pas que f possède un extremum en x_0 comme le montre l'exemple $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $f(x) = x^3$.*

Ainsi, une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I admette un extremum local en x_0 est que x_0 soit un point critique.

Exercice 7 (TVI pour la dérivée). *Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ avec $a < b$ telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.*

(a) *On suppose f' continue sur $[a, b]$. Justifier l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

(b) *On ne suppose plus nécessairement que f' est continue. Montrer qu'il existe encore $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

26.4.2 Théorème de Rolle

Le théorème suivant dû à Michel Rolle[2] nous permettra d'établir le théorème des accroissements finis.

Théorème de Rolle . *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

■ ***Applications.***

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et $C_0, \ldots, C_n$ des nombres réels tels que $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{k+1} = 0$ Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\sum_{k=0}^{n} C_k x^k = 0$.

(2) Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(b)^2 - f(a)^2 = b^2 - a^2$. Montrer que l'équation $f'(x)f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.

(3) Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé et on note $\mathscr{C}$ la courbe de f. Soit $M(\alpha,\beta)$ un point sur la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ tel que $\alpha \notin [a,b]$. Prouver que l'on peut mener de M une droite tangente à $\mathscr{C}$.

26.4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis . *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

■ ***Autre formulation du théorème des accroissements finis.***

Soit $h > 0$ et $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

Inégalité des accroissements finis. . *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que pour tout $x \in]a,b[$, $\quad |f(x)| \leq M$. Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$$

2. Michel Rolle (1652-1719) : académicien français resté célèbre pour avoir eu le premier, du moins le suppose-t-on, l'idée géométrique d'une démonstration du théorème qui porte son nom, énoncé dans son Traité d'algèbre en 1690.

26.4.4 Caractérisation des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables

A l'aide du théorème des accroissements finis, Lagrange [3] lie le sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée.

Théorème de Lagrange . *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

(1) *f est croissante ssi pour tout $x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$*

(2) *f est décroissante ssi pour tout $x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0$*

(3) *f est constante ssi pour tout $x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$*

Passons maintenant à la caractérisation de la monotonie stricte.

On dit qu'un ensemble A est d'intérieur vide s'il ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

Par exemple, les ensembles $\{0,1,3,-4\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ sont d'intérieur vide.

En revanche, les intervalles non triviaux, ainsi que toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non trivial ne sont pas d'intérieur vide.

Théorème . *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. La fonction f est strictement croissante sur $[a,b]$ ssi : pour tout $x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$ et l'ensemble des zéros de f' est d'intérieur vide.*

Autrement dit, une fonction dérivable est strictement croissante si et seulement sa dérivée est positive et si elle ne s'annule qu'en des points isolés.

Conséquence : si pour tout $x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante.

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. De plus,

$$f'(x) = 0 \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi$$

L'ensemble des zéros de f' est donc $\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ qui est d'intérieur vide donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

26.5 Exercices.

■ Utilisation de la définition.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2.$$

Montrer que f est constante.

3. Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813 : mathématicien franco-ialien qui se fait connaître grâce à son ouvrage *Mécanique analytique* reprenant de manière rigoureuse les connaissances en Mécanique depuis Newton. Il enseigne la géométrie à Turin et à Berlin, où il remplace Euler à l'académie des sciences comme directeur des mathématiques (1766). Ses contributions sont importantes en algèbre, analyse ainsi qu'en astronomie.

Exercice 9. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\min(f(x), f(y)) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \max(f(x), f(y))$$

quels que soient les réels x, y avec $x \neq y$.

Exercice 10. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point dans l'intérieur de I. On suppose que f est dérivable en x_0. Déterminer la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

■ Dérivée d'une réciproque

Exercice 11. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x + \ln x$.

(a) Montrer que f est une bijection.

(b) Soit g la bijection réciproque. Montrer que g est dérivable et donner l'expression de g' en fonction de g.

Exercice 12. Dans cet exercice, on désigne par f une fonction dérivable d'une variable réelle telle que

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} \qquad (1)$$

(1) Trouver toutes les fonctions constantes f vérifiant la relation (1).
Dans la suite de l'exercice, on suppose que f n'est pas constante.

(2) Montrer que, pour tout nombre réel x : $-1 \leq f(x) \leq 1$.

(3) Calculer $f(0)$.

(4) On pose $a = f'(0)$. En utilisant la définition de la dérivée, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de a. En déduire que $a \neq 0$.

(5) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que la fonction f^{-1} est dérivable sur cet intervalle.
Calculer la dérivée de f^{-1}.

(6) Expliciter $f^{-1}(y)$ en fonction de y et de a. Trouver enfin toutes les fonctions f non constantes, dérivables et vérifiant la relation (1).

Exercice 13. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est absolument croissante si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)} \geq 0 \text{ sur } I.$$

On définit les fonctions sh, ch et th sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

(1) Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

(2) On note argth la bijection réciproque de la fonction th. Montrer que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.

(3) Montrer qu'il existe des polynômes P et Q tels que pour tout $x \in]-1,1[$

$$P(x)\operatorname{argth}'(x) = Q(x)\operatorname{argth}''(x)$$

(4) Montrer que argth est absolument croissante sur $[0,1[$.

■ **Calcul de dérivée n^e**

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2X - (2n^2 - 3n + 1)$$

Exercice 15. Calculer les dérivées n-ème des fonctions

$$x \mapsto x^2\cos(\frac{x}{2}), \quad x \mapsto x^n e^{-x}, \quad x \mapsto \ln(1+x)$$

Exercice 16. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{-x + \sqrt{1+x^2}}$.

(1) Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x,

$$4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) - g(x) = 0.$$

En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Etablir une relation de récurrence entre $g^{(n)}(0)$ et $g^{(n+2)}(0)$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calculer la dérivée n-ème en fonction des dérivées $f^{(k)}$ de la fonction $g_n(x) = x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Appliquer alors le résultat pour calculer les dérivées n-ème des fonctions $x \in]0,+\infty[\mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ et $x \in]0,+\infty[\mapsto x^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 18. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis que la fonction arctan vérifie

$$(1+x^2)\arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x\arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(x) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. En déduire $\arctan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $B = (X-1)^3$ et former le quotient.

Exercice 20. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \cdots & \frac{1}{(n+2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$. On considère un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$ et on appelle P la fonction polynomiale définie par : $P(t) = \dfrac{x_1}{n!} + \dfrac{x_2}{(n+1)!}t + \ldots + \dfrac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{(k+n-1)!}t^{k-1}$

(1) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^n P(t)$. Calculer $f(1), f'(1), \ldots, f^{(n-1)}(1)$.

(2) En déduire les dérivées $P(1), P'(1), \ldots, P^{(n-1)}(1)$.

(3) Montrer que $P = 0$ et en déduire que A est inversible.

■ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 21. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x - x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \cos(x) + 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

■ Applications du théorème de Rolle, des accroissements finis.

EXERCICE 24. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

EXERCICE 25. Soit f une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que f s'annule $n+1$ fois sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

EXERCICE 26. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ ayant un nombre $n \geq 2$ racines réelles distinctes. Montrer que P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

EXERCICE 27. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé et on note $\mathscr{C}$ la courbe de f.

Soit $M(\alpha, \beta)$ un point sur la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ tel que $\alpha \notin [a, b]$.

Prouver que l'on peut mener de M une droite tangente à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 28. Soit g une fonction impaire de classe $\mathscr{C}^5$ sur $[-\alpha, \alpha]$ (avec $\alpha > 0$) et soit $\beta \in [-\alpha, \alpha]$ avec $\beta \neq 0$.

(1) Montrer que $g(0) = g''(0) = g^{(4)}(0) = 0$

(2) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g(\beta) = \dfrac{\beta}{3}(g'(\beta) + 2g'(0)) - \dfrac{\beta^5}{180}A$

(3) Soit h la fonction définie sur $[-\alpha, \alpha]$ par $h(x) = g(x) - \dfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \dfrac{x^5}{180}A$.
En appliquant le théorème de Rolle successivement à h, h', h'' puis à la fonction $x \mapsto Ax - g^{(4)}(x)$ montrer qu'il existe $\delta \in]0, \beta[$ tel que $A = g^{(5)}(\delta)$.

EXERCICE 29. Soient $a < b < c$ trois points d'un intervalle I et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, $P(c) = f(c)$ et le déterminer.

(b) En utilisant $g = f - P$, montrer qu'il existe $d \in]a, c[$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d).$$

EXERCICE 30. Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ s'annulant en $-1, 0$ et 1. On définit une fonction g par $g(x) = 2x^4 + x + f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 31. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}$$

Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. Divergence d'une série. Soit f la fonction définie sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

En appliquant le théorème des accroissements finis sur chaque intervalle $[k, k+1]$ où k est un entier supérieur ou égale à 2, montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice 33. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f'(x) \geq 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

■ Etude de suites récurrentes utilisant les accroissements finis

Exercice 34. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ dans $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$ et en déduire que $\lim u_n = \ell$

Exercice 35. (1) Étudier la fonction définie par $f(x) = 1 - \sin x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

(2) On considére la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = 1 - \sin u_n$
Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 3$, on a $\alpha \leq u_n \leq 1$.

(3) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 36. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$ et $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

(1) (a) Déterminer le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.

(b) Étudier les variations de la fonction f.

(c) Déterminer les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et la relation : $\forall\, n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

■ Exercices avancés

Exercice 37. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(1) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit n un entier naturel. On pose $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

(a) Montrer que l'on a : $(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x)$

(b) Établir que P_n est un polynôme dont le coefficient dominant est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

(3) Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(a) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $G : x \mapsto \begin{cases} g(\frac{1}{x} + a - 1) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

(b) Montrer que G' s'annule en un point de $]0, 1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a, +\infty[$.

(4) Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty, a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, a[$, telle que $h(a) = 0$ et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. Montrer que h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty, a[$.

(5) Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 38. Soit n un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel :

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^n(x+1)^n$$

et P_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout x réel :

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ F_n^{(n)}(x) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

où $F_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de F_n.

(1) Montrer que P_n est une fonction polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

(2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On note $B_{n,k}$ le polynôme défini par $B_{n,k} = (X+1)^k (X-1)^{n-k}$.

(a) Montrer que $(B_{n,0},\ B_{n,1},\ \ldots,\ B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer l'égalité : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}$.

(c) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

(d) Démontrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Étudier la parité de P_n suivant les valeurs de n.

(3) On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n-1$.

(a) Démontrer que, pour tout x réel : $F_n^{(p)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p!}{2^n n!} \binom{n}{k} \binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}(x)$.

(b) En déduire que $F_n^{(p)}(1) = 0$ et $F_n^{(p)}(-1) = 0$.

(c) Démontrer que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,\ 1[$.

26.6 Indications pour les exercices

INDICATION POUR L'EXERCICE 7. Commencer par montrer qu'il existe x_1 et x_2 dans $]a, b[$ tels que $f(x_1) > f(a), \quad f(x_2) > f(b)$ puis étudier $f([a, b])$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 19. Ecrire la formule de Taylor au point 1.

INDICATION POUR L'EXERCICE 25. Appliquer successivement le théorème de Rolle à $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ entre leurs zéros sur $[a, b]$ ou alors raisonner par récurrence sur n.

INDICATION POUR L'EXERCICE 26. Appliquer le théorème de Rolle à P entre deux racines consécutives.

INDICATION POUR L'EXERCICE 27. Considérer la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{\beta - f(x)}{\alpha - x}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 29. (a) Penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange.
(b) Appliquer le théorème de Rolle à g puis une deuxième fois à g'.

INDICATION POUR L'EXERCICE 31. Considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{1+x^2}$ et appliquer le théorème de Rolle successivement à g, g', g'', etc.

INDICATION POUR L'EXERCICE 33. Pour étudier les limites en $\pm\infty$, montrer que pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) + x$ et pour $x \leq 0$, $f(x) \leq f(0) + x$ en utilisant la positivité de l'intégrale.

26.7 Correction des exercices