guessmaths

# Devoir surveillé n° 2 B-Dérivabilité 2éme Bac SM

## Partie A

*Soit f la fonction définie sur Intervalle* $[-1;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\text{Arctan}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} & si\ \ x>-1 \\ f(-1)=1 \end{cases}$

*Et soit* $(C_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$,

**0,75p** 1. a) *Montrer que f est continue à droite en* $-1$ .

**1p** b) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; *puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

2\. *Soit* $x\in]0;+\infty[$.

*On pose que :* $\varphi(t)=t^3\left(\text{Arctan}(x)-x\right)-x^3\left(\text{Arctan}(t)-t\right)$

**1,5p** a) *En utilisant le théorème de Rolle à la fonction* $\varphi$ *sur l'intervalle* $[0;x]$,

*montrer que :* $(\exists c\in]0;x[):\ \dfrac{\text{Arctan}(x)-x}{x^3}=\dfrac{-1}{3(1+c^2)}$

**1p** b) *En déduire que f est dérivable à droite en* $-1$ *et que* $f'_d(-1)=\dfrac{-1}{3}$.

**1,25p** 3. a) *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \frac{1}{1+x^2}<\text{Arctan}(x)<x$$

**1,5p** b) *Montrer que f est dérivable sur* $]-1;+\infty[$, *et que :*

$$(\forall x\in]-1;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}-\text{Arctan}\sqrt{x+1}\right)$$

**1p** c) *En déduire le tableau de variations de f.*

**1,25p** 4. a) *Montrer que l'équation* $f(x)=x$ *admet une unique solution* $\alpha$ *dans* $]-1;+\infty[$

**1p** b) *Vérifier que* $f(1)<1$, *puis déduire que* $\alpha\in]0;1[$

**1p** c) *Représenter* $(C_f)$ . *( On prendra* $\alpha\simeq 0{,}7$ *et* $\|\vec{i}\|=2cm$ *)*

## Partie B

*Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-\text{Arctan}(x)$

**1,25p** *1. Calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *; puis dresser le tableau de variations de g.*

**0,5p** *2. En déduire que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) : \left|g(x)\right| \leq \frac{\pi}{2}$

**1p** *3.Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\right) : \left|f'(x)\right| \leq \frac{\pi}{4}$

*4. Soit* $(u_n)$ *la suite numérique définie par :* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ .

**1p** *a) Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ ; $0 < u_n < 1$

*b) Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$: $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{\pi}{4}\left|u_n - \alpha\right|$

*1,25p* *c) En déduire que la suite* $(u_n)$ *est convergente et déterminer sa limite.*

***<u>Partie C</u>***

*1p* *1. Montrer que f admet une fonction réciproque* $f^{-1}$ *définie sur* $\left]0;1\right]$

*1p* *2.Montrer que* $f^{-1}$ *est dérivable sur* $\left]0;1\right[$ *et calculer* $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

*0,5p* *3. Construire* $\left(C_{f^{-1}}\right)$ *la courbe de* $f^{-1}$ *dans le même repère* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, .