



Exercice 1 : (Fonctions composées)

Dans chacun des cas déterminer les limites indiquées.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

Correction Exercice 1

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$  présente une forme indéterminée  $(+\infty - \infty)$

■ Pour tout  $x > 0$  ; on a :  $\sqrt{x^2 - 3x} = |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x}} = x \sqrt{1 - \frac{3}{x}}$  (Car  $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ )

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  ; Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty$ .

■ On peut aussi dire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  ; Donc par propriété des limites de fonction composée ; on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty$

2. On a  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$  (Car  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x) = 2$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$ )

Donc par propriété des limites de fonction composée ; on a :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$

3. On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

Donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\infty$

Exercice 2 : Formes indéterminées

Dans chacun des cas déterminer les limites indiquées.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$

3.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x - 3}}{x - 3}$

### Correction Exercice 2

1. Nous sommes en présence de la forme indéterminée " $\infty-\infty$ ". Pour lever cette indétermination, nous allons utiliser l'expression conjuguée.

$$\begin{aligned}\text{On a pour tout } x > 0 ; \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\left((\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-1})^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\cancel{x^2}+1 - \cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} = +\infty$  ; (Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ ) alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

2. On procède de la même manière. Pour  $x > 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+4x}+x)(\sqrt{x^2+4x}-x)}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+4x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \frac{\cancel{x^2}+4x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} \\ &= \frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\end{aligned}$$

$$\text{Donc ; } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x}-x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}$$

Et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x}}+1 = 2$  ; par suite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+4x}-x = 2$

3. Le numérateur et le dénominateur de la fraction  $\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$  s'annulent en  $-2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \text{ On va donc factoriser chacune de ces expressions par } x - (-2) = x + 2.$$

Par le procédé de la division euclidienne appliqué au numérateur on a :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x + 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x - 2 & \\ -x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On peut donc écrire :  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x^2 - 1)$

Et on remarquant que :  $x^2 - 4$  et sous la forme d'identité remarquable  $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

On peut écrire :  $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

L'expression  $\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$  devient donc :

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - 1)}{\cancel{(x+2)}(x - 2)} = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 2)}$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 2)} = -\frac{3}{4} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 2)}$$

4. De nouveau le numérateur et le dénominateur dans l'expression  $\frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3}$  s'annulent en 3.

Il est plus commode dans ce cas d'utiliser le conjugué du numérateur on obtient :

$$\frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} = \frac{3x - 9}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} = \frac{3\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{3x} + 3)} = \frac{3}{(\sqrt{3x} + 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{(\sqrt{3x} + 3)} = \frac{1}{2}$$