

guessmaths

Correction Examen nationale 2020 Session Normale

2ème Bac SM A et B

Exercice 1 :

1- On a : $(D) : 7x^3 - 13y = 5$

a) On pose : $d = x \wedge 13$; on a : $d \mid 7x^3 - 13y = 5$

Donc $d = 1$ ou $d = 5$

Et puisque 5 ne divise pas 13 alors $d = 1$; donc $x \wedge 13 = 1$

b) On a : 13 est un nombre premier et $x \wedge 13 = 1$; donc d'après théorème de FERMAT : $x^{12} \equiv 1[13]$

c) On sait que : $7x^3 - 13y = 5$; donc $7x^3 \equiv 5[13]$

Donc $14x^3 \equiv 10[13]$

D'où $x^3 \equiv 10[13]$ car $14 \equiv 1[13]$

d) D'après la question précédente ; on a : $x^3 \equiv 10[13] \Rightarrow x^3 \equiv -3[13]$
 $\Rightarrow x^6 \equiv 9[13]$
 $\Rightarrow x^{12} \equiv 81[13]$

Et puisque $81 = 3 + 13 \times 6 \Rightarrow 81 \equiv 3[13]$

Donc $x^{12} \equiv 3[13]$

2) D'après les questions précédentes ; on a :

Si (D) admet une solution $(x; y)$; alors : $x^{12} \equiv 1[13]$ et $x^{12} \equiv 3[13]$

Ce qui est absurde car $1 \not\equiv 3[13]$

D'où (D) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$

Exercice 2 :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^* \right\}$$

1) a) Soient M et M' deux éléments de E ; alors il existe $(x; x') \in \mathbb{R}^2$ et $(y; y') \in (\mathbb{R}^*)^2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} ; \text{ donc : } M \times M' = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & x' + xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$$

Avec $(x' + xy') \in \mathbb{R}$ et $yy' \in \mathbb{R}^*$; donc $M \times M' \in E$

Par conséquent E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

b) Cherchons un contre-exemple

On a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de E ; et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D'autre part $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par suite la multiplication n'est pas commutative dans E .

c) $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $(\forall y \in \mathbb{R}^*)$ on a : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -\frac{x}{y} + \frac{x}{y} \\ 0+0 & 0+\frac{y}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $(\forall y \in \mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) On a : • "x" est une loi de composition interne dans E .

(car E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$)

• la loi "x" est associative dans E .

(car "x" est associative dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

• $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'élément neutre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ appartient à E ($1 \in \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}^*$)

• Pour tout $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ de E il existe $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ un élément de E ; tel que :

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

Donc $(E, \times)$ est un groupe non commutatif.

$$3) E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$\mathbb{R}^* \rightarrow E$$

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) = M(x)$$

a) Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}^*$

$$\varphi(x \times x') = M(x \times x')$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & xx' - 1 \\ 0 & xx' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' - 1 \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\
&= M(x) \times M(x') \\
&= \varphi(x) \times \varphi(x')
\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

b) On considère l'application $\tilde{\varphi} : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (F, \times)$
 $x \mapsto \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = M(x)$

- $\tilde{\varphi}$ est un homomorphisme car φ l'est.
- $\tilde{\varphi}$ est injective car pour tout $(x, x') \in (\mathbb{R}^*)^2$; on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x') &\Rightarrow M(x) = M(x') \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' - 1 \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow x = x'
\end{aligned}$$

- $\tilde{\varphi}$ est surjective car pour tout $(x, x') \in (\mathbb{R}^*)^2$; car Pour tout $M \in F$ de E ; on a :

$$(\exists x \in \mathbb{R}^*) \text{ tel que : } M = M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(x)$$

Donc $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(F, \times)$; est comme $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif alors $(F, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre :

$$\tilde{\varphi}(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Exercice 3 :

$$(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$$

$$1) \text{ On a : } z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0 \Leftrightarrow z^3 - mz^2 - m(z^2 - 2mz + m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - m)z^2 - m(z - m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - m)(z^2 - m(z - m)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - m)(z^2 - mz + m^2) = 0$$

$$\text{Donc } z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0 \Leftrightarrow (z - m)(z^2 - mz + m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - m = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - mz + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = m \quad \text{ou} \quad z^2 - 2 \times \frac{1}{2} mz + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = m \quad \text{ou} \quad \left(z - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = m \quad \text{ou} \quad \left(z - \frac{m}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}mi}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = m \quad \text{ou} \quad z - \frac{m}{2} = -\frac{\sqrt{3}mi}{2} \quad \text{ou} \quad z - \frac{m}{2} = \frac{\sqrt{3}mi}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = m \quad \text{ou} \quad z = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)m \quad \text{ou} \quad z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)m$$

$$\text{D'où } S = \left\{ m; \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)m; \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)m \right\}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) On a : } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} &= \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} \\ &= \frac{-(-m)}{m^2} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Supposons que : } m &= 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{6} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \bullet \quad z_1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)m \\ &= \sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_2 &= \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)m \\ &= \sqrt{3} \times e^{i\frac{-\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3} \times e^{i\frac{-\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

Deuxième partie

$$1) \text{ On a : } \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{a}{b}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} \\ = e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Donc O ; A et B ne sont pas alignés.

2) a) Puisque P est le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme O en A ; alors :

$$z_A = z_O \times e^{i\frac{\pi}{2}} + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) z_P ; \text{ donc } z_P = \frac{a}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ = \frac{me^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ = \frac{me^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \\ = \frac{m}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} me^{i\frac{7\pi}{12}}$$

De même on trouve que :

$$r = z_R = \frac{z_O - z_B \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ = \frac{-be^{i\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ = \frac{-me^{i\frac{-\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \\ = \frac{-m}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} \\ = \frac{e^{i\pi} \times m}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} me^{i\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} me^{i\frac{17\pi}{12}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} me^{i\left(\frac{17\pi}{12} - 2\pi\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} me^{-i\frac{7\pi}{12}}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } r = \frac{\sqrt{2}}{2} me^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned}
b) \text{ On a : } q &= \frac{z_B - z_A e^{i\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\
&= \frac{me^{-i\frac{\pi}{3}} - me^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\
&= \frac{m\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}m}{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}m}{2} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{13\pi}{12}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}m}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \left(e^{-i\frac{7\pi}{12}} - e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}m}{2} i \left(-2i \sin \frac{7\pi}{12}\right) \\
&= \sqrt{2}m \sin \frac{7\pi}{12}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } q = \sqrt{2}m \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
3) \text{ On a : } OQ &= |q - 0| = |q| \\
&= \left| \sqrt{2}m \sin \frac{7\pi}{12} \right| \\
&= \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} |m|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Et } PR &= |r - p| \\
&= \left| m \frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{i\frac{7\pi}{12}} - e^{-i\frac{7\pi}{12}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$= \left| m \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \right|$$

$$= \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} |m|$$

Donc $OQ = PR$

D'autre part ; on a : $\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} = \frac{r - p}{q}$

$$= \frac{m\sqrt{2}i \sin \frac{7\pi}{12}}{m\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12}}$$

$$= i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

D'où $\arg \left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Par suite (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

Première Partie

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) On considère la fonction $\varphi : t \mapsto \ln t$; pour tout $x \in]0; +\infty[$; On a :

— φ est continue sur $[x; x+1]$

— φ est dérivable sur $]x; x+1[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis ; on a :

$$(\exists c \in]x; x+1[) / \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x+1-x} = \varphi'(c)$$

$$\text{Càd } (\exists c \in]x; x+1[) / \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$$

$$\text{Et } x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc } (\forall x > 0) : \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2) D'après la proposition (P) ; pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x+1} < \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}$

$$\text{Donc } \frac{x^3}{x+1} < x^3 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) < x^2$$

$$\text{D'où } \frac{x^3}{x+1} < f(x) < x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < x$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$; alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Par suite f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

b) D'après (P) pour tout $x > 0$ on a : $\frac{x^3}{x+1} < f(x)$ et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty$

Donc par encadrement des limites on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'autre part on a : $\frac{x^2}{x+1} < \frac{f(x)}{x}$ et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où (C_f) admet une Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$; donc

la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de deux fonctions

dérivables. Et la fonction polynôme $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Et pour tout $x \in]0; +\infty[$; on a : $f'(x) = \left(x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)'$$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x+1}$$

$$= 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} \right)$$

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} \right)$

b) On a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \frac{1}{3(x+1)} < \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

$$4) \forall x \in I ; g(x) = \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

g est dérivable sur I car f est dérivable sur I est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur

$$\begin{aligned} I ; \text{ et on a pour tout } x \in I : g'(x) &= 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)' \\ &= 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x^2 \frac{-\frac{1}{x^2}}{x+1} \\ &= 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(x+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in I) ; g'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(x+1)} \right)$$

$$(\forall x \in I) \text{ on a : } 2x > 0 \text{ et } \frac{1}{2(x+1)} < \frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{D'où } (\forall x \in I) ; g'(x) > 0$$

Par suite g est strictement croissante sur I .

b) Pour tout $x \in I$; on pose : $h(x) = g(x) - 1$

On a h est continue sur I comme somme de deux fonctions continues sur I ; de même h est dérivable sur I et pour tout $x \in I$; on a : $h'(x) = g'(x)$

D'où h est strictement croissante sur I .

$$\text{De plus on a : } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right) = -1$$

$$(\text{Car } \forall x \in I ; \frac{x^2}{x+1} < x^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) < x ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = 0)$$

$$\text{Donc } h(I) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=]-1; +\infty[$$

Comme $0 \in]-1; +\infty[$; alors d'après le TVI l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 1$ admet une solution unique α dans I .

$$\text{Et on a : } h(1) = \ln 2 - 1 < 0 \text{ et } h(2) = 4\ln \frac{3}{2} - 1 > 0$$

$$\text{Donc } h(1) < 0 < h(2) \Rightarrow h(1) < h(\alpha) < h(2)$$

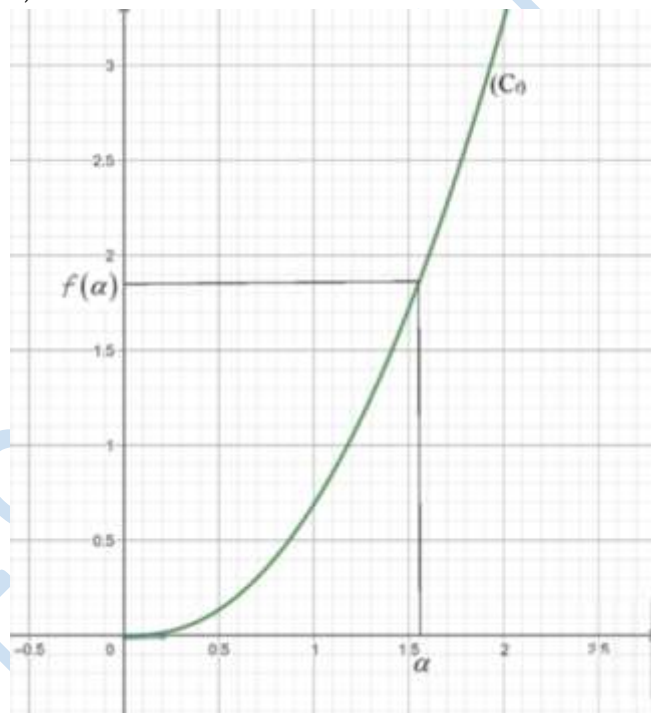
$$\Rightarrow 1 < \alpha < 2 \text{ (} h \text{ est strictement croissante sur } I \text{)}$$

$$\text{D'où } \alpha \in]1; 2[$$

c) Pour tout $x \in I$; on a : $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = x$; donc l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution dans I ; de plus on a : $f(0) = 0$; donc 0 solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0; +\infty[$

D'où l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $[0; +\infty[$ qui sont 0 et α

Construction de (C_f)



b) f est une fonction continue et strictement croissante sur I ; donc f est bijective de I sur $h(I) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$

Deuxième Partie

$$\begin{cases} u_0 \in]0; \alpha[\\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) • Pour $n = 0$; On a $u_0 \in]0; \alpha[$; donc $0 < u_0 < \alpha$

• Pour $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < u_n < \alpha$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \alpha$

On a : $0 < u_n < \alpha$ et f^{-1} est strictement croissante sur $[0; \alpha]$; donc :

$$f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(\alpha) ; \text{ or } \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 \\ f(\alpha) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\alpha) = \alpha \end{cases} ; \text{ d'où : } 0 < u_{n+1} < \alpha$$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \alpha$

2) a) g est continue et strictement croissante sur $]0; \alpha[$; donc

$$g(]0; \alpha[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow \alpha^-} g(x) \right[=]0; g(\alpha)[=]0; 1[$$

$$\begin{aligned} b) (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{f^{-1}(u_n)}{u_n} \\ &= \frac{f^{-1}(u_n)}{f(f^{-1}(u_n))} \\ &= \frac{1}{g(f^{-1}(u_n))} \\ &= \frac{1}{g(u_{n+1})} > 1 \quad (\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in]0; \alpha[; \text{ alors } g(u_n) \in]0; 1[) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > u_n \quad (\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0)$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante et comme elle est majorée par α alors elle est convergente.

$$3) \text{ On a : } (u_n) \text{ est définie par : } \begin{cases} u_0 \in]0; \alpha[\\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Où • f^{-1} est continue sur $]0; \alpha[$.

$$\bullet f^{-1}(]0; \alpha[) =]f^{-1}(0); f^{-1}(\alpha)[=]0; \alpha[\subset]0; \alpha[$$

(car f^{-1} est strictement croissante sur $]0; \alpha[$)

$$\bullet u_0 \in]0; \alpha[$$

$$\bullet u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$

• (u_n) est convergente.

Donc si $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; alors l est solution de l'équation $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$

Or l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions qui sont 0 et α

Et puisque (u_n) est strictement croissante et $u_0 > 0$; alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \Rightarrow l > 0$

Par suite $l = \alpha$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Troisième Partie

$$(\forall x \in I) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

1) a) On a pour tout $t \in I$; $f(t) \geq 0$

Donc • Si $x \in [0;1]$; alors $F(x) = \int_x^1 f(t) dt \geq 0$

• Si $x > 1$; alors $F(x) = \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt \leq 0$

b) pour tout $x \in I$; on a : f est continue sur l'intervalle pour tout

$[\inf(1; x); \sup(1; x)]$; donc F est dérivable sur I et on a ; pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = -f(x)$$

c) $(\forall x \in I) ; F'(x) = -f(x) < 0$ (car $f(x) > 0$ sur I .)

Donc F est strictement croissante sur I .

2) a) $(\forall x \in [1; +\infty[)$ et $(\forall t \in [1; x]) f(t) \geq f(1) = \ln 2$ (car f est croissante sur $[1; x]$)

$$\text{Donc } \int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \ln 2 dt \Rightarrow -\int_x^1 f(t) dt \geq -\int_x^1 \ln 2 dt \quad (\text{car } x > 1)$$

$$\Rightarrow \int_x^1 f(t) dt \leq \int_x^1 \ln 2 dt$$

$$\text{D'où } F(x) \leq (1-x)\ln 2$$

b) Puisque $(\forall x \in [1; +\infty[) ; F(x) \leq (1-x)\ln 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)\ln 2 = -\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$3) a) (\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 t^3 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

En utilisant une intégration par parties ; on pose :

$$\begin{cases} u(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) & u'(t) = -\frac{1}{t(t+1)} \\ v'(t) = t^3 & v(t) = \frac{t^4}{4} \end{cases} ; \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{t^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4} \times \left(-\frac{1}{t(t+1)} \right) dt \\ &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{(t+1)} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{(t+1)} dt$$

$$b) (\forall x \in]0; +\infty[) ; \int_x^1 \frac{t^3}{(t+1)} dt = \int_x^1 t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1) \right]_x^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right)$$

$$= \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \int_x^1 \frac{t^3}{(t+1)} dt = \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$

c) $(\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{(t+1)} dt$ (d'après question 3)a)

$$\text{Donc } F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right)$$

$$= \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{5}{24} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(x+1)$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

D'où $(\forall x \in]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$

$$= \frac{5}{24} \quad \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^4 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+t)}{t^4} \right) = 0 \right)$$

La fonction F est continue à droite en 0 ; donc : $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$

Donc $\int_0^1 f(t) dt = \frac{5}{24}$

4) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$

a) $(\forall k \in [0; n-1]) ; F$ est continue sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in \left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[/ F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n}\right) F'(c)$$

$$\exists c \in \left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[/ F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{2n} f(c)$$

Et puisque $\frac{k}{n} < c < \frac{2k+1}{2n}$ et f est strictement croissante sur $\left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[$ alors :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) < f(c) < f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < -\frac{1}{2n}f(c) < -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < \mathcal{F}\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{k}{n}\right) < -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall k \in [0; n-1]) ; -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < \mathcal{F}\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{k}{n}\right) < -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < \mathcal{F}\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{k}{n}\right) < -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right) < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathcal{F}\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{k}{n}\right) \right) < \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right) < V_n < -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$\text{D'autre part on a : } \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \text{ pour tout } k \in [0; n-1]$$

$$\text{Donc } f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right) < \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)$$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right) < \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \Rightarrow -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right) > -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$\text{Par suite } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \leq V_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

c) D'après les sommes de Riemann on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(t) dt = \frac{5}{24}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{5}{48}$$

$$\text{Et comme } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \leq V_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right) ; \text{ alors :}$$

$$\text{Donc la suite } (V_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\frac{5}{48}$$