guessmaths

Exercice 1

En utilisant le raisonnement par équivalences successives, montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^{+}) : \sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{5}} \geq \sqrt{x}$ 2) $\forall x \in [1,+\infty[: x \geq 2\sqrt{x-1}$ 3) $\forall x \in [-2,2] : \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$

Exercice 2

En utilisant le raisonnement par contraposition, montrer que :

1) *pour tous* x *et* y *de* $\mathbb{R}$: $\left(x+y \leq z \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leq \frac{1}{2}z\right)$

2) *pour tout* x *et* y *de* $]1,+\infty[$: $\left(x \neq y \Rightarrow x^2-2x \neq y^2-2y\right)$

3) *pour tous* a *et* b *de* $\mathbb{R}$: $(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1 \Rightarrow a+b-ab \neq 1)$

Exercice 3

En utilisant le raisonnement par la disjonction des cas, montrer que :

1) *pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *on a :* $n\left(n^2+5\right)$ *est un multiple de* 3

2) *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *on a :* $\sqrt{x^2+1} - x > 0$

Exercice 4

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1) *pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$ *on a :* $3^{2n} + 2^{6n-5}$ *est un multiple de* 11

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$

3) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a > 0) : (1+a)^n \geq 1+na$ *inegaliteé de BERNOUILLI*

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = \dfrac{(-1)^{n-1} \times n(n+1)}{2}$

6) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = (n-1)\times 2^n + 1$

Exercice 5

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : |x+y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2-xy}$

Exercice 6

1) *montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}) : x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$

2) *soient* a , b *et* c *trois réels de l'intervalle* $[0;1]$

Montrer que $a(1-b) \leq \frac{1}{4}$ *ou* $b(1-c) \leq \frac{1}{4}$ *ou* $c(1-a) \leq \frac{1}{4}$

3) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soient* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ *des réels de l'intervalle* $[0;1]$

On pose $A_n = a_1 \times a_2 \times .... \times a_n$ et $B_n = (1-a_1)\times(1-a_2)\times....\times(1-a_n)$.

Montrer que $A_n \leq \frac{1}{2^n}$ ou $B_n \leq \frac{1}{2^n}$

Exercice 7

Montrer que $\forall a \in \mathbb{N} : \sqrt{9a^2+30a+35} \notin \mathbb{N}$

Exercice 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $h(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

1) vérifier que $h(x) = x^3(x-1) + x^2 - x + 1$ et $h(x) = x^2(x^2 - x + 1) + 1 - x$

2) en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) > 0$

Exercice 9

1) Donner la négation et la valeur de vérité de la proposition : $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}^*) : n > b$

2) soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que $\left[(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |a| < \frac{1}{n}\right] \Rightarrow a = 0$

3) Soient a et b deux réels. Montrer par l'absurde que $\left[(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a < b + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow a \leq b$

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que : $ab + bc + ca = 1$

1) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

2) Montrer par l'absurde que : $a + b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $b + c \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $c + a \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 11 :

Soient a, b et c les mesures des trois côtés d'un triangle avec $a + b + c = 1$

1) Montrer que : $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$ et $c < \frac{1}{2}$

2) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$

Exercice 12 :

On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : |x^2 - 4| + |1 - x^2| + \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}$

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x^2 - 4| + |1 - x^2| \geq 3$

2) En déduire que $(I) \Rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

3) Déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I)

Exercice 13

Montrer que le système $\begin{cases} 2x - 3y > 1 \\ 3y - 2z \geq 3 \\ x - z \leq 2 \end{cases}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$