guessmaths

Série d'exercices sur ln et exp 2éme Bac SM

EXERCICE 1

Partie A:

Soit n un entier naturel tel que $n>1$.

Soit la fonction g_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x)=n(x+1)+\ln(x)$

1- Etudier les variations de la fonction g_n :

2- a) Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une et unique solution $a_n \in]0;+\infty[$.

 b) Vérifier que $a_n \leq e^{-n}$

3- En déduire le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie B:

Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x(\ln(x))^n}{1+x} & si\ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

1- a) Etudier la continuité de f_n à droite en 0 .

 b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

3- a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

 b) Déterminer le signe de $f_n'(x)$ selon les valeurs de n puis dresser le tableau de variation de f_n.

4- Vérifier que $f_n(e)=\dfrac{e}{1+e}$

5- Montrer que : $(\forall x \in [1;e])$; $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leq 0$.

Partie C:

On considère l'équation suivante : $(E_n): f_n(x)=\dfrac{e}{2(1+e)}$

1- Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique $u_n \in [1;e]$.

2- Vérifier que : $(\forall n \geq 2)$; $f_{n+1}(u_n)\leq \dfrac{e}{2(1+e)}$

3- Etudier la monotonie de la suite (u_n) et déduire qu'elle est convergente (soit β sa limite).(ln(p))"

4- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $f_n(u_n) \leq \dfrac{\beta(\ln(\beta))^n}{1+\beta}$

5- On suppose que : $\beta \in [1;e]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta(\ln(\beta))^n}{1+\beta}$

6- Déterminer la valeur de β.

EXERCICE 2

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

1- Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$ On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

2- Montrer que $g^{-1}(\sqrt{2}) = -\ln(\sqrt{2}-1)$

3- a) Vérifier que pour tout x de $[0;+\infty[$; $g'(x)=\sqrt{g^2(x)-1}$

b) En déduire que g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que : $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4- Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x-1}$

5- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{x}$

Partie B :

Soit F la fonction définie sur $[e^{\sqrt{2}};+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\sqrt{\ln^2(t)-2}}\,dt & si\ x \in]e^{\sqrt{2}};+\infty[\\ F(e^{\sqrt{2}})=\ln(\sqrt{2}-1) \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Montrer que F est dérivable sur $]e^{\sqrt{2}};+\infty[$ et calculer $F'(x)$

2- Soit U la fonction définie sur $[e^{\sqrt{2}};+\infty[$ par : $U(x)=g^{-1}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)$

a) Montrer que U est dérivable sur $]e^{\sqrt{2}};+\infty[$ et que : $U'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)-2}}$

b) *En déduire que pour tout x de* $\left[e^{\sqrt{2}};+\infty\right[$, $F(x)=g^{-1}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

3- *Étudier la dérivabilité de de F à droite en* $e^{\sqrt{2}}$.

4- *Dresser le tableau de variation de F.*

5- *Déterminer la nature de la branche infinie de* (C)

6- *Tracer une allure de* (C)

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136